

### Feuille 3 - Cardinaux

**Exercice 1.** Montrer qu'il existe un ordinal  $\alpha$  tel que  $\alpha = \aleph_\alpha$ .

**Exercice 2.**

1. Montrer que, pour trois cardinaux  $\kappa, \lambda, \mu$  on a  $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$  et  $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda + \mu}$ .
2. Trouver une suite de cardinaux non nuls  $(\kappa_i)$  (avec  $I$  infini) telle que  $\sum \kappa_i = \prod \kappa_i$ .
3. Trouver deux suites de cardinaux  $\kappa_i$  et  $\lambda_i$  tels que pour tout  $i$  on ait  $\kappa_i < \lambda_i$  mais  $\sum \kappa_i = \sum \lambda_i$ .
4. Calculer  $\prod_{n < \omega} n$  (comme produit de *cardinaux*).
5. Soit  $\kappa$  un cardinal infini. Montrer que  $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ .
6. Montrer que  $\prod_{n \in \omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$ .

**Exercice 3.** Soit  $\alpha$  un ordinal limite. On rappelle que la *cofinalité* de  $\alpha$  est définie comme étant le plus petit cardinal d'une partie non majorée de  $\alpha$ .

1. Montrer que  $\text{cof}(\alpha)$  est le plus petit ordinal  $\gamma$  tel qu'il existe une fonction  $f: \gamma \rightarrow \alpha$  dont l'image ne soit pas (strictement) majorée.
2. Montrer que  $\text{cof}(\alpha)$  est le plus petit ordinal  $\gamma$  tel qu'il existe une fonction  $f: \gamma \rightarrow \alpha$  strictement croissante et dont l'image ne soit pas (strictement) majorée.  
(En particulier, il existe une suite strictement croissante  $(\alpha_i)_{i < \text{cof}(\alpha)}$  d'ordinaux tel que  $\alpha = \sup\{\alpha_i: i < \text{cof}(\alpha)\}$ .)
3. Montrer que  $\text{cof}(\text{cof}(\alpha)) = \text{cof}(\alpha)$ .

**Exercice 4.** Soit  $\kappa$  un cardinal infini. On rappelle que  $\kappa$  est *régulier* s'il est égal à sa cofinalité, autrement dit, si toute partie  $X \subseteq \kappa$  de cardinal  $< \kappa$  satisfait  $\sup(X) < \kappa$ .

1. Donner la cofinalité de  $\aleph_{\omega+\omega}$  et  $\aleph_{\omega^2+\omega+1}$ .
2. Si  $\kappa$  est un cardinal limite, montrer qu'il existe une suite strictement croissante  $(\kappa_i)_{i < \text{cof}(\kappa)}$  de cardinaux telle que  $\kappa = \sup\{\kappa_i: i < \text{cof}(\kappa)\}$ .
3. Montrer que toute partie de  $\kappa$  de cardinal  $\kappa$  est cofinale dans  $\kappa$ .
4. Montrer que  $\text{cof}(\kappa)$  est le plus petit ordinal  $\gamma$  tel que  $\kappa$  soit la réunion de  $\gamma$  ensembles de cardinal strictement inférieur à  $\kappa$ .
5. Montrer que  $\kappa$  est régulier si, et seulement si, pour tout  $\lambda < \kappa$  et toute famille  $(X_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$  d'ensembles tels que  $|X_\alpha| < \kappa$  pour tout  $\alpha < \lambda$ , on a  $|\cup X_\alpha| < \kappa$ .
6. On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal infini non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal  $\alpha$  doit vérifier  $\alpha = \aleph_\alpha$ .
7. Soit  $\lambda < \text{cof}(\kappa)$ . Montrer que toute fonction croissante  $f: \kappa \rightarrow \lambda$  est constante sur un segment final de  $\kappa$ .

**Exercice 5.**

1. Soit  $\kappa$  un cardinal infini et  $\lambda$  un cardinal non nul. Montrer que  $(\kappa^+)^{\lambda} = \kappa^+ \cdot \kappa^{\lambda}$ .
2. Soit  $n$  un entier et  $\lambda$  un cardinal non nul. Montrer que  $\aleph_n^{\lambda} = \aleph_n \cdot 2^{\lambda}$ .