Feuille 4 - Structures, va-et-vient, théories, extensions élémentaires.

Exercice 1. Soit $L = \{R\}$ le langage réduit à une relation binaire R. Montrer qu'il existe deux L-structures non isomorphes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ telles que $\mathfrak{M}$ se plonge dans $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}$ se plonge dans $\mathfrak{M}$.

Exercice 2.

1. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Montrer que deux ordres totaux, denses et sans extrémités sont ∞-équivalentes.
2. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Vérifier si les paires suivantes de structures sont ∞-équivalentes :
   - $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ où la deuxième structure est ordonnée lexicographiquement en utilisant les ordres usuels sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$, et avec priorité sur la première coordonnée ;
   - $(A \times \mathbb{Z}, <)$ et $(B \times \mathbb{Z}, <)$ où A et B sont deux ensembles finis non vides ordonnés et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée ;
   - $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ où l'ordre est lexicographique avec priorité sur la première coordonnée et les coordonnées sont ordonnées avec leurs ordres usuels ;
   - $(A \times \mathbb{Z}, <)$ et $(B \times \mathbb{Z}, <)$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux ordres totaux, denses, sans extrémités de bases A et B, et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée.
3. On fixe un corps K et on considère le langage des K-espaces vectoriels : $\mathcal{L}(K) = \{0, +, \lambda_k | k \in K\}$ où $+$ est la loi interne, 0 l'élément neutre de celle-ci, chaque λ_k est un symbole de fonction unaire décrivant la multiplication par le scalaire k. Montrer que deux K-espaces vectoriels en tant que $\mathcal{L}(K)$-structures sont ∞-équivalents si, et seulement si, ils ont même dimension ou sont de dimensions infinies.

Exercice 3. Soit $L = \{B, \leq\}$, où B est un prédicat unaire, et $\leq$ une relation binaire. On appelle *chaîne bicolore* une L-structure totalement ordonnée par $\leq$ (les éléments satisfaisant B seront dits *blancs*, les autres *noirs*) ; elle est *générique* si entre deux éléments blancs il y en a toujours au moins un noir, et entre deux noirs il y a toujours au moins un blanc.

1. Donner des exemples de chaînes bicolores génériques dénombrables et non dénombrables.
2. Donner un exemple d'une chaîne bicolore générique tel que l'ensemble des points blancs est dénombrable et tel que l'ensemble des points noirs n'est pas dénombrable.
3. Soit B l'ensemble des points blancs d'une chaîne bicolore générique et N l'ensemble des points noirs de cette même chaîne. Montrer que $|B| \leq 2^{|N|}$ et $|N| \leq 2^{|B|}$.
4. Donner un exemple de deux chaînes bicolores génériques non ∞-équivalentes.

Exercice 4.

1. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?

2. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle infini alors tous les modèles de T sont infinis. Sont-ils tous isomorphes ?

Exercice 5. La théorie des groupes infinis est-elle complète ? Même question avec la théorie des corps infinis.

Exercice 6.

1. Donner une axiomatisation de la théorie des ordres totaux denses sans extrémité. Montrer que cette théorie est complète.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies. Montrer que cette théorie est complète.
3. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies. Montrer que cette théorie est complète.

Exercice 7.

1. Donner un exemple de structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ mais n'est pas élémentairement équivalente à $\mathfrak{N}$.
2. Donner un exemple de structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes mais $\mathfrak{M}$ n'est pas une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$.

Exercice 8.

1. Soient $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3$. Montrer que
   (a) $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_3$ implique $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_3$;
   (b) $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_3$ et $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_3$ implique $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$.
2. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne élémentaire de L-structures ($\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}_j$, pour tout $i < j$). Montrer que pour tout $i \in I$, $\mathfrak{M}_i \prec \cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i$.

Exercice 9. Soit L le langage réduit au symbole de relation binaire $<$. Soit T la théorie des ordres totaux dans ce langage.

1. Décrire une axiomatisation de T.
2. Soit $n > 0$. Expliciter une formule du premier ordre $\phi_n(x, y)$ telle que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T, $\mathfrak{M} \models \phi_n(a, b)$ si et seulement si $a < b$ et il existe exactement $n - 1$ éléments de $\mathfrak{M}$ strictement compris entre a et b.
3. Soit $\mathfrak{N}$ la L-structure $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire tel que
   $$(a, m) <^{\mathfrak{N}} (b, n) \text{ si et seulement si } a < b \text{ ou } (a = b \text{ et } m < n).$$
   Soit $\mathfrak{M}$ la sous-structure de $\mathfrak{N}$ de domaine $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$.
4. On considère $\mathfrak{M}'$ la sous-structure de $\mathfrak{N}$ de domaine $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times 2\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}'$. A-t-on $\mathfrak{M}' \prec \mathfrak{N}$?

Exercice 10. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?