Feuille 5 - Théorème de compacité : les premiers pas.

Exercice 1.
1. Soit T une théorie et φ un énoncé tel que $T \vdash \varphi$. Montrer qu'il existe une partie finie $T' \subseteq T$ telle que $T' \vdash \varphi$.
2. Montrer que si T est une théorie finiment axiomatisable, alors de toute axiomatisation de T, on peut extraire une axiomatisation finie.

Exercice 2. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis de cardinal arbitrairement grand a un modèle infini.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules $\Phi(x)$ dans le langage des groupes tel que pour tout groupe G et tout $g \in G$ g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ un langage, θ un énoncé de ce langage et T_1, T_2 deux théories dans ce langage qui contiennent θ. On suppose que tout modèle de θ est soit modèle de T_1 soit modèle de T_2 mais jamais des deux. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Exercice 5. Soit $\mathcal{L}$ un langage fini, et T une théorie dans le langage $\mathcal{L}$. On suppose que, dans tout modèle de T, les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies. Montrer qu'il existe une fonction $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments d'un modèle de T est de cardinal inférieur à $f(n)$.

Exercice 6. (Ordres discrets sans extrémités.) Soient $\mathcal{L} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. Dans ce langage, soit T la théorie qui énonce qu'elle est une relation d'ordre discret sans extrémités et qui est formé par les conséquences de ces énoncés.
1. Écrire les énoncés qui axiomatisent T.
2. Vérifier que tout ensemble de la forme $K \times \mathbb{Z}$ ordonné par l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée, où K est une chaîne dense sans extrémités et $\mathbb{Z}$ est muni de son ordre discret usuel, est modèle de T. Montrer que deux tels modèles sont ∞-équivalents.
3. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire qui est de la forme décrite dans le point précédent. Déduire que T est une théorie complète.