Feuille 6 - Théorème de compacité : suite.

Exercice 1. On considère le langage $\mathcal{L} = \{E_i\}_{i<\omega}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire.

1. Écrire les énoncés qui disent que chaque E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe d'équivalence, et que pour tout $i < \omega$, la relation E_{i+1} partitionne chaque classe de E_i en exactement deux classes infinies.
2. Donner un modèle des énoncés ci-dessus ; on notera T la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.
3. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tels que $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$. Montrer que deux modèles riches de T sont ∞-équivalents.
4. Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ de T a une extension élémentaire riche et en déduire que T est complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ? κ-catégorique pour un cardinal κ ?

Exercice 2. On rappelle que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p (0 ou un nombre premier) est complète pour tout p. À l'aide du théorème de compacité, montrer le *principe de transfert* selon lequel étant donné ϕ un énoncé dans le langage des anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
2. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout nombre premier p suffisamment grand.
3. ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinité de nombres premiers p.

Utiliser ce principe pour montrer que toute application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$ injective est nécessairement surjective.

Exercice 3. (Le théorème de Svenonius) Cet exercice a pour but de démontrer l'énoncé suivant :

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'ensemble sous-jacent M, $A \subset M$ et D une $\mathcal{L}(M)$-formule qui définit une partie de M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Si

(*) *pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, pour tout automorphisme σ de $\mathcal{N}$ fixant A point par point et pour tout $x \in N^n$ (l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{N}$), $\mathcal{N} \models D(x)$ si, et seulement si $\mathcal{N} \models D(\sigma(x))$,*

alors D est définissable par une formule à paramètres dans A.

1. Montrer que la condition **(*)** équivaut à

Si pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et toute paire d'éléments $\alpha, \beta \in N^n$ on a $\mathrm{t}p_{\mathcal{N}}(\alpha/A) = \mathrm{t}p_{\mathcal{N}}(\beta/A)$, alors $\mathcal{N} \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\beta)$.

2. On fixe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\alpha \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models D(\alpha)$. On notera $\mathcal{L}^+$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ n symboles de constantes $c_1, \ldots, c_n$ et un symbole de constante pour chaque élément de M. On pose $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :

$$\mathrm{T}h(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(c) \mid \phi \in \mathrm{t}p_{\mathcal{N}}(\alpha/A)\ \} \cup \ \{\neg D(c)\}\ .$$

En déduire l'existence d'une formule D_α dans $\mathrm{t}p_{\mathcal{N}}(a/A)$ telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\alpha(x) \to D(x))$ soit vrai.

3. Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et tous les n-uplets de celles-ci qui satisfont D. Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule D_∞ à paramètres dans A telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\infty(x) \leftrightarrow D(x))$ soit vrai.