Université Lyon 1 / ENS Lyon Semestre de printemps 2017-2018
M1A Logique et Théorie des Ensembles

Partiel du 6 mars 2018, durée 2h.

Le sujet est constitué de quatre problèmes indépendants. Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la rédaction des copies.

Problème 1. Soit X un ensemble et R une relation binaire sur X, c'est-à-dire une partie de $X \times X$. Pour $x \in X$, l'ensemble des R-prédécesseurs de x est la partie

$$R[x] = \{y \in X | (y, x) \in R\}.$$

Par induction sur les ordinaux, on définit pour chaque ordinal α une partie X_α de X de la façon suivante :

— $X_0 = \emptyset$;

— pour tout ordinal $\alpha > 0$, $X_\alpha = \{x \in X | R[x] \subseteq X_\beta\}$ si $\alpha = \beta + 1$; $X_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} X_\beta$ si α est limite.

1. Montrer que pour tous ordinaux α et β tels que $\alpha \leq \beta$ on a $X_\alpha \subseteq X_\beta$. (Indication : on pourra montrer le résultat par récurrence transfinie sur β.)
2. Soit
$$Y = \{x \in X | x \in X_\alpha \text{ pour un } \alpha \in ON\}.$$
Pour chaque $y \in Y$, on définit le *rang* de y comme
$$\mathrm{rg}(y) = \min\{\alpha \in ON | y \in X_{\alpha+1}\}.$$
Montrer que pour tout $y \in Y$ et $x \in X$, si $(x, y) \in R$ alors $x \in Y$ et $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.
3. On dit que (X, R) est *bien fondée* si tout sous-ensemble non-vide Z de X contient un élément R-minimal z_0, c'est-à-dire un élément $z_0 \in Z$ tel que $R[z_0] \cap Z = \emptyset$.
Montrer que (X, R) est bien fondée si et seulement si $Y = X$.

Problème 2. (Lemme de König sur les arbres à branchement fini)
Un *arbre* est la donnée d'un ensemble N (les nœuds) muni d'une relation binaire de succession immédiate et d'un nœud origine r (sa racine) tel que :

— r n'est successeur immédiat d'aucun autre nœud ;

— tout nœud autre que la racine est successeur immédiat d'un unique nœud ;

— tout nœud appartient à une branche partant de r (une suite de successeurs immédiats d'origine r).

On dit qu'un arbre est à *branchement fini* lorsque chacun des nœuds n'a qu'un nombre fini de successeurs immédiats.
Montrer, à l'aide de l'axiome du choix dépendant, qu'un arbre infini qui est à branchement fini possède au moins une branche infinie.

(On rappelle que l'**axiome du choix dépendant** est l'énoncé suivant : pour tout ensemble X et toute relation binaire sur X tels que pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ vérifiant xRy, il existe alors une suite $(x_n)_{n<\omega}$ de X telle que $x_n R x_{n+1}$ pour tout $n < \omega$.)

Problème 3. Pour ce problème, on travaille dans ZFC.
Soit $\kappa \geq \mu$ deux cardinaux infinis. On considère l'ensemble

$$S = \{X \subset \kappa \colon |X| = \mu\}.$$

Montrer que $|S| = \kappa^\mu$.
(Indication : pour montrer que $\kappa^\mu \leq |S|$, on pourra considérer l'ensemble

$$S' = \{\Gamma \subset \mu \times \kappa \colon |\Gamma| = \mu\}$$

et remarquer que $|S'| = |S|$.)

Problème 4. Pour ce problème, on travaille dans ZFC.

1. Soit α et β deux ordinaux limites non nuls. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante $(\gamma_\delta)_{\delta<\beta}$ d'éléments de α telle que $\alpha = \sup\{\gamma_\delta \colon \delta < \beta\}$.
   Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\beta)$.
   (Indication : pour montrer que $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \mathrm{cof}(\beta)$, on pourra considérer une application $f : \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ non majorée et définir une application $g : \mathrm{cof}(\alpha) \to \beta$ en posant $g(\eta) = 0$ si $f(\eta) \leq \gamma_0$ et $g(\eta) = \sup\{\delta < \beta \colon f(\eta) > \gamma_\delta\}$ sinon.)
2. Soit κ un cardinal régulier non dénombrable et $\mu < \kappa$ un cardinal infini régulier.
   On considère la partie E de κ suivante :

   $$E = \{\alpha < \kappa \colon \mathrm{cof}(\alpha) = \mu\}.$$

   Soit C une partie de κ non majorée et close [1] (On dit que C est close si pour tout $A \subset C$ tel que $|A| < \kappa$, on a $\sup A \in C$.)
   Montrer que $E \cap C \neq \emptyset$. [2]

1. Une telle partie s'appelle un club.
2. Une telle partie E qui a une intersection non vide avec tout club est dite stationnaire.

Corrigé.

Problème 1.

1. *Montrer que pour tous ordinaux α et β tels que $\alpha \leq \beta$ on a $X_\alpha \subseteq X_\beta$.*
   Montrons ce résultat par récurrence transfinie sur β.
   - Si $\beta = 0$ c'est évident.
   - Si $\beta = \gamma + 1$, par hypothèse de récurrence il suffit de montrer que $X_\gamma \subseteq X_\beta$. Soit $x \in X_\gamma$.
     - Ou bien $\gamma = \delta + 1$. On a $X_\delta \subseteq X_\gamma$ et alors $R[x] \subseteq X_\delta \subseteq X_\gamma$. Donc $x \in X_\beta$.
     - Ou bien γ est limite. Alors il existe $\delta < \gamma$ tel que $x \in X_\delta \subseteq X_{\delta+1}$. D'où $R[x] \subseteq X_\delta \subseteq X_\gamma$ et $x \in X_\beta$.
   - Ou bien β est limite et c'est évident par définition.
2. *Montrer que pour tout $y \in Y$ et $x \in X$, si $(x, y) \in R$ alors $x \in Y$ et* $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.
   Notons tout d'abord que tout élément de Y a bien un rang car pour tout ordinal α, $X_\alpha \subseteq X_{\alpha+1}$.
   Remarquons de plus que pour tout ordinal α, si $z \in X_\alpha$ alors $\mathrm{rg}(z) < \alpha$: c'est évident si α est un ordinal successeur ; dans le cas où α est limite, alors il existe $\beta < \alpha$ tel que $z \in X_\beta \subseteq X_{\beta+1}$ et donc $\mathrm{rg}(z) \leq \beta < \alpha$.
   Soient $y \in Y$ et $x \in X$ tels que $(x, y) \in R$. Alors $y \in X_{\mathrm{rg}(y)+1}$ et $x \in R[y] \subseteq X_{\mathrm{rg}(y)}$. Donc $x \in Y$ et $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.
3. *Montrer que (X, R) est bien fondée si et seulement si $Y = X$.*
   ($\Leftarrow$) Supposons $Y = X$. Soit Z une partie non vide de X. Il existe alors un élement $z_0 \in Z$ de rang minimal (les rangs étant à valeurs ordinales). Par la question précédente et la minimalité du rang de z_0, il suit que $R[z_0] \cap Z = \emptyset$.
   ($\Rightarrow$) Supposons que $Y \neq X$. Soit $Z = X \setminus Y$. Considérons $z \in Z$. Si $R[z]$ était inclus dans Y alors on aurait $R[z] \subseteq X_{\sup\limits_{t \in R[z]} (\mathrm{rg}(t)+1)}$ et donc z serait un élément de Y. Donc $R[z]$ n'est pas inclus dans Y et donc $R[z] \cap Z \neq \emptyset$. Donc (X, R) n'est pas bien fondée.

Problème 2. *Montrer, à l'aide de l'axiome du choix dépendant, qu'un arbre infini qui est à branchement fini possède au moins une branche infinie.*

Soit Γ un arbre infini à branchement fini d'origine r. (On dénotera également par Γ l'ensemble des nœuds de cet arbre.)

Un nœud y est dit successeur d'un nœud x s'il existe une suite de successeurs immédiats $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ avec $n \geq 1$ et x_{i+1} successeur immédiat de x_i pour tout $i < n$.

Pour tout nœud x, on note Γ_x le sous-arbre de Γ ayant pour racine x, c'est-à-dire l'arbre constitué de x et de ces successeurs. On considère l'ensemble X des nœuds x tels que Γ_x est infini.

Alors

- $X \neq \emptyset$ car $r \in X$;
- si x est un nœud dans X, au moins un des successeurs immédiats de x est dans X : en effet comme Γ est à branchement fini, x a un nombre fini $y_1, \ldots, y_n$ de successeurs immédiats et alors Γ_x est la réunion disjointe de $\{x\}$ et des sous-arbres Γ_{y_i}. L'un au moins de ces sous-arbres est nécessairement infini.

Par l'axiome des choix dépendants, il existe une suite infinie $(x_n)_{n<\omega}$ d'éléments de X tel que pour tout i, le nœud x_{i+1} est successeur immédiat de x_i. Cette suite forme donc une branche infinie de Γ.

Problème 3. *Soit $\kappa \geq \mu$ deux cardinaux infinis. On considère l'ensemble*

$$S = \{X \subset \kappa \colon |X| = \mu\}.$$

Montrer que $|S| = \kappa^\mu$.
Vérifions que $|S| \leq \kappa^\mu$: pour chaque $X \in S$, il existe une application $f_X : \mu \to \kappa$ dont l'image est X. Par l'axiome du choix, on obtient ainsi une injection de S dans l'ensemble des applications de μ dans κ, car si $X \neq Y$, $f_X \neq f_Y$.
Vérifions maintenant que $\kappa^\mu \leq |S|$: on considère l'ensemble

$$S' = \{\Gamma \subset \mu \times \kappa \colon |\Gamma| = \mu\}.$$

On a $\mu\kappa = \kappa$ car $\kappa \geq \mu$. Ainsi, S' est équipotent à S. L'injection qui à une application $f : \mu \to \kappa$ associe son graphe entraîne alors que $\kappa^\mu \leq |S'| = |S|$.

Problème 4.

1. *Soit α et β deux ordinaux limites non nuls. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante $(\gamma_\delta)_{\delta<\beta}$ d'éléments de α telle que $\alpha = \sup\{\gamma_\delta \colon \delta < \beta\}$.*
   Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\beta)$.
   Vérifions tout d'abord que $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \mathrm{cof}(\beta)$. Soit $\phi : \mathrm{cof}(\beta) \to \beta$ non majorée. Posons $\psi : \mathrm{cof}(\beta) \to \alpha$ définie par $\psi(\eta) = \gamma_{\phi(\eta)}$. Comme $(\gamma_\delta)_{\delta<\beta}$ est une suite strictement croissante non majorée et ϕ n'est pas majorée, il suit que ψ ne l'est pas non plus et donc $\mathrm{cof}(\beta) \geq \mathrm{cof}(\alpha)$.
   Montrons réciproquement que $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \mathrm{cof}(\beta)$. Soit une application $f : \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ non majorée. On peut alors définir une application $g : \mathrm{cof}(\alpha) \to \beta$ en posant $g(\eta) = 0$ si $f(\eta) \leq \gamma_0$ et $g(\eta) = \sup\{\delta < \beta \colon f(\eta) > \gamma_\delta\}$ sinon. Vérifions que g est bien à valeurs dans β : comme $(\gamma_\delta)_{\delta<\beta}$ n'est pas majorée, il existe $\delta_0 < \beta$ tel que $f(\eta) \leq \gamma_{\delta_0}$ et donc, dans le cas où $f(\eta) > \gamma_0$, on a $\sup\{\delta < \beta \colon f(\eta) > \gamma_\delta\} \leq \delta_0 < \beta$. Vérifions pour terminer que g n'est pas majorée. Soit $\delta_0 < \beta$. Comme β est limite, $\delta_0 + 1 < \beta$ et comme f n'est pas majorée et α est limite, il existe $\eta < \mathrm{cof}(\alpha)$ tel que $f(\eta) > \gamma_{\delta+1}$ mais alors $g(\eta) > \delta_0$.
2. *Soit κ un cardinal régulier non dénombrable et $\mu < \kappa$ un cardinal infini régulier.*
   On considère la partie E de κ suivante :

   $$E = \{\alpha < \kappa \colon \mathrm{cof}(\alpha) = \mu\}.$$

   Soit C une partie de κ non majorée et close (On dit que C est close si pour tout $A \subset C$ tel que $|A| < \kappa$, on a $\sup A \in C$.)
   Montrer que $E \cap C \neq \emptyset$.
   On construit par induction une suite strictement croissante $(\gamma_\delta)_{\delta<\mu}$ d'éléments de C, en posant $\gamma_0 = \min C$; pour $\delta = \beta+1 < \mu$, $\gamma_\delta = \min\{\alpha \in C \colon \alpha > \gamma_\beta\}$ (qui existe car C n'est pas majorée) ; et pour $\delta < \mu$ limite, $\gamma_\delta = \sup\{\gamma_\beta \colon \beta < \delta\}$ (qui existe car C est close).
   On pose maintenant $\gamma = \sup\{\gamma_\delta \colon \delta < \mu\}$.
   Comme C est close, on également $\gamma \in C$.
   Par la question précédente et la régularité de μ, on a également $\mathrm{cof}(\gamma) = \mathrm{cof}(\mu) = \mu$ d'où $\gamma \in E$.