
Examen du 10 mai 2017, durée 3h.

Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la rédaction des copies.

Problème 1. On dit qu'un élément a d'un groupe additif $\langle G, 0, +\rangle$ est divisible par un entier $n > 0$ s'il existe $b \in G$ tel que $a = n \cdot b = \underbrace{b + \cdots + b}_{n}$. Soit P un ensemble de nombres premiers.

Montrer qu'il existe une extension élémentaire de $\langle \mathbb{Z}, 0, +\rangle$ contenant un élément divisible par tous les nombres premiers de P mais par aucun des autres nombres premiers.

Problème 2. Soit T une théorie complète sur un langage dénombrable L.

1. Soit μ un cardinal infini. Vérifier que 2^μ a exactement 2^μ parties de cardinalité au plus égale à μ.
2. Soit $\mathfrak{M} \models T$ de cardinalité 2^μ.
   (a) Montrer qu'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{M}_1$ de $\mathfrak{M}$ de même cardinalité 2^μ qui réalise tout type de $S_1(A)$ pour toute partie $A \subset M$ telle que $|A| \leq \mu$.
   (b) En déduire que $\mathfrak{M}$ admet une extension élémentaire de même cardinalité 2^μ qui est μ^+-saturée. (Indication : on pourra construire une chaîne d'extensions élémentaires de longueur μ^+ et utiliser le fait que tout cardinal infini successeur est régulier.)
3. On suppose que κ est un cardinal fortement inaccessible, c'est-à-dire un cardinal régulier non dénombrable tel que pour tout $\mu < \kappa$, on ait $2^\mu < \kappa$.
   À l'aide de la question précédente, montrer que T admet un modèle κ-saturé de cardinalité κ.

Problème 3. Soit le langage $L = \{E, P_i : i \in \omega\}$ où E est une relation binaire et les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans ce langage qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints, que E est une relation d'équivalence avec une infinité de classes, et que chaque classe d'équivalence a une intersection infinie avec chacun des P_i.

1. Donner un exemple de modèle de T.
2. Montrer que T élimine les quantificateurs et est complète. (Indication : on pourra considérer deux modèles ω-saturés.)
3. La théorie T a-t-elle un modèle dénombrable ω-saturé ?
4. Montrer que T a $2^{\aleph_0}$-modèles dénombrables à isomorphisme près.

Problème 4. Soit le langage $L = \{R\}$ où R est une relation binaire. On appelle graphe (non orienté) une L-structure satisfaisant les deux axiomes suivants :
– $\forall x\ \neg R(x, x)$ (Antireflexivité),
– $\forall x \forall y\ R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$ (Symétrie).

1. Soit G un graphe fini.

   Montrer qu'il existe un graphe fini H contenant G ayant la propriété suivante : pour toute partie X de G, il existe $h \in H$ tel que

$$X = \{g \in G : H \models R(g, h)\}.$$

2. Considérons l'ensemble Σ des énoncés suivants :
   – $\forall x\ \neg R(x, x)$,
   – $\forall x \forall y\ R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$,
   – pour chaque $n,\ m \geq 0$,

$$\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_m \left(\bigwedge_{i,\, j} x_i \neq y_j \right) \to \exists z \left(\bigwedge_i R(z, x_i) \wedge \bigwedge_j \neg R(z, y_j) \right).$$

   Montrer que Σ est consistant. (Indication : en utilisant (1), on pourra construire un modèle de Σ à l'aide d'une chaîne de graphes finis).

3. Soit T la théorie axiomatisée par Σ.

   Montrer que tout modèle de T est infini.

4. Montrer que T est $\aleph_0$-catégorique, c'est-à-dire à un unique modèle dénombrable à isomorphisme près. (Indication : on pourra vérifier que deux modèles de T quelconques sont toujours ∞-isomorphes.)

5. Soit Γ le modèle dénombrable de T. (Ce graphe s'appelle le graphe aléatoire.)
   (a) Montrer que Γ est homogène ; c'est-à-dire que tout isomorphisme partiel de Γ entre deux sous-graphes finis se prolonge en un automorphisme de Γ.
   (b) Montrer que Γ est universel ; c'est-à-dire que tout graphe fini est isomorphe à un sous-graphe de Γ.
   (c) Montrer que tout graphe homogène et universel est modèle de T.