Feuille 3 - Cardinaux

Exercice 1. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $\alpha = \aleph_\alpha$.

Exercice 2.

1. Montrer que, pour trois cardinaux κ, λ, μ on a $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$ et $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
2. Trouver une suite de cardinaux non nuls (κ_i) (avec I infini) telle que $\sum \kappa_i = \prod \kappa_i$.
3. Trouver deux suites de cardinaux κ_i et λ_i tels que pour tout i on ait $\kappa_i < \lambda_i$ mais $\sum \kappa_i = \sum \lambda_i$.
4. Calculer $\prod_{n<\omega} n$ (comme produit de *cardinaux*).
5. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
6. Montrer que $\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Exercice 3. Soit α un ordinal limite. On rappelle que la *cofinalité* de α est définie comme étant le plus petit cardinal d'une partie non majorée de α.

1. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f\colon \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas (strictement) majorée.
2. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f\colon \gamma \to \alpha$ strictement croissante et dont l'image ne soit pas (strictement) majorée.
   (En particulier, il existe une suite strictement croissante $(\alpha_i)_{i<\mathrm{cof}(\alpha)}$ d'ordinaux tel que $\alpha = \sup\{\alpha_i \colon i < \mathrm{cof}(\alpha)\}$.)
3. Montrer que $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Exercice 4. Soit κ un cardinal infini. On rappelle que κ est *régulier* s'il est égal à sa cofinalité, autrement dit, si toute partie $X \subseteq \kappa$ de cardinal $< \kappa$ satisfait $\sup(X) < \kappa$.

1. Donner la cofinalité de $\aleph_{\omega+\omega}$ et $\aleph_{\omega^2+\omega+1}$.
2. Si κ est un cardinal limite, montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\kappa_i)_{i<\mathrm{cof}(\kappa)}$ de cardinaux telle que $\kappa = \sup\{\kappa_i \colon i < \mathrm{cof}(\kappa)\}$.
3. Montrer que toute partie de κ de cardinal κ est cofinale dans κ.
4. Montrer que $\mathrm{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que κ soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ.
5. Montrer que κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
6. On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal infini non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$.
7. Soit $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$. Montrer que toute fonction croissante $f\colon \kappa \to \lambda$ est constante sur un segment final de κ.

Exercice 5.

1. Soit κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+.\kappa^\lambda$
2. Soit n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n.2^\lambda$.