Feuille 5 - Extensions élémentaires, théories complètes, Löwenheim-Skolem, va-et-vient, ...

Exercice 1. Soit $L = \{R\}$ le langage réduit à une relation binaire R. Montrer qu'il existe deux L-structures non isomorphes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ telles que $\mathfrak{M}$ se plonge dans $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}$ se plonge dans $\mathfrak{M}$.

Exercice 2. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne de L-structures ($\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_j$, pour tout $i < j$). Munir la réunion $M = \cup_{i\in I} M_i$ d'une L-structure $\mathfrak{M}$ (canonique) telle que pour tout $i \in I$, $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$. Par la suite, cette structure $\mathfrak{M}$ sera notée $\cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i$.

Exercice 3.

1. Donner un exemple de structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ mais n'est pas élémentairement équivalente à $\mathfrak{N}$.
2. Donner un exemple de structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes mais $\mathfrak{M}$ n'est pas une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$.

Exercice 4.

1. Soient $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3$. Montrer que
   (a) $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_3$ implique $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_3$;
   (b) $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_3$ et $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_3$ implique $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$.
2. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne élémentaire de L-structures ($\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}_j$, pour tout $i < j$). Montrer que pour tout $i \in I$, $\mathfrak{M}_i \prec \cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i$.

Exercice 5. Une théorie est dite *complète* si elle est maximale pour l'inclusion. On considère une théorie T sur un langage L. Vérifier que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est complète.
2. Pour tout L-énoncé θ, on a $\theta \in T$ ou $\neg\theta \in T$.
3. T est la théorie d'une L-structure.
4. Les modèles de T sont élémentairement équivalents.

Exercice 6. La théorie des groupes infinis est-elle complète ? Même question avec la théorie des corps infinis.

Exercice 7. Soit T une théorie complète.

1. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T ont même cardinal (en fait on peut montrer qu'ils sont isomorphes, voir détail dans le polycopié - proposition 4.30). Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?

2. Montrer que si T a un modèle infini alors tous les modèles de T sont infinis. Sont-ils tous isomorphes ?

Exercice 8. Une théorie T est dite κ-catégorique si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ.

Montrer qu'une théorie T sur un langage L qui est κ-catégorique pour un cardinal $\kappa \geq |L|$ et qui n'a que des modèles infinis est complète.

Exercice 9.

1. Donner une axiomatisation de la théorie des ordres totaux denses sans extrémité. Montrer que cette théorie est $\aleph_0$-catégorique et donc complète.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies. Montrer que cette théorie est $\aleph_0$-catégorique et donc complète.
3. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies. Montrer que cette théorie est $\aleph_0$-catégorique et donc complète.

Exercice 10 (Plus difficile)**.** On considère le langage $L = \{E_i\}_{i<\omega}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire.

1. Écrire les énoncés qui disent que chaque E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe d'équivalence, et que pour tout $i < \omega$, la relation E_{i+1} partitionne chaque classe de E_i en exactement deux classes.
2. Donner un modèle des énoncés ci-dessus ; on notera T la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.
3. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tels que $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$. Donner un exemple de modèle riche de T.
4. Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ dénombrable de T admet une extension élémentaire dénombrable riche.
5. Montrer que les modèles dénombrables riches sont isomorphes.
6. En déduire que T est complète.
7. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ? κ-catégorique pour un cardinal κ ?

Exercice 11.

1. Montrer que deux corps algébriquement clos de même caractéristique et de même degré de transcendance sont isomorphes.
2. En déduire que la théorie des corps de caractéristique p fixé est complète.

Exercice 12. À l'aide du théorème de compacité, montrer le *principe de transfert* selon lequel étant donné ϕ un énoncé dans le langage des anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

2. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout nombre premier p suffisamment grand.
3. ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinité de nombres premiers p.

Utiliser ce principe pour montrer que toute application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$ injective est nécessairement surjective. (Théorème d'Ax.)

Exercice 13. 1. Soit L le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Montrer que deux ordres totaux, denses et sans extrémités sont ∞-équivalentes.

2. Soit L le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Vérifier si les paires suivantes de structures sont ∞-équivalentes :
   — $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ où la deuxième structure est ordonnée lexicographiquement en utilisant les ordres usuels sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$, et avec priorité sur la première coordonnée ;
   — $(A \times \mathbb{Z}, <)$ et $(B \times \mathbb{Z}, <)$ où A et B sont deux ensembles finis non vides ordonnés et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée ;
   — $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ où l'ordre est lexicographique avec priorité sur la première coordonnée et les coordonnées sont ordonnées avec leurs ordres usuels ;
   — $(A \times \mathbb{Z}, <)$ et $(B \times \mathbb{Z}, <)$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux ordres totaux, denses, sans extrémités de bases A et B, et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée.
3. On fixe un corps K et on considère le langage des K-espaces vectoriels : $\mathcal{L}(K) = \{0, +, \lambda_k | k \in K\}$ où $+$ est la loi interne, 0 l'élément neutre de celle-ci, chaque λ_k est un symbole de fonction unaire décrivant la multiplication par le scalaire k. Montrer que deux K-espaces vectoriels en tant que $\mathcal{L}(K)$-structures sont ∞-équivalents si, et seulement si, ils ont même dimension ou sont de dimensions infinies.

Exercice 14. Soit $L = \{B, \leq\}$, où B est un prédicat unaire, et $\leq$ une relation binaire. On appelle *chaîne bicolore* une L-structure totalement ordonnée par $\leq$ (les éléments satisfaisant B seront dits *blancs*, les autres *noirs*) ; elle est *générique* si entre deux éléments blancs il y en a toujours au moins un noir, et entre deux noirs il y a toujours au moins un blanc.

1. Donner des exemples de chaînes bicolores génériques dénombrables et non dénombrables.
2. Donner un exemple d'une chaîne bicolore générique tel que l'ensemble des points blancs est dénombrable et tel que l'ensemble des points noirs n'est pas dénombrable.
3. Soit B l'ensemble des points blancs d'une chaîne bicolore générique et N l'ensemble des points noirs de cette même chaîne. Montrer que $|B| \leq 2^{|N|}$ et $|N| \leq 2^{|B|}$.
4. Donner un exemple de deux chaînes bicolores génériques non ∞-équivalentes.

Exercice 15. Soit L le langage réduit au symbole de relation binaire $<$. Soit T la théorie des ordres totaux dans ce langage.

1. Décrire une axiomatisation de T.
2. Soit $n > 0$. Expliciter une formule du premier ordre $\phi_n(x, y)$ telle que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T, $\mathfrak{M} \models \phi_n(a, b)$ si et seulement si $a < b$ et il existe exactement $n - 1$ éléments de $\mathfrak{M}$ strictement compris entre a et b.

3. Soit $\mathfrak{N}$ la L-structure $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire tel que

$$(a, m) <^{\mathfrak{N}} (b, n) \text{ si et seulement si } a < b \text{ ou } (a = b \text{ et } m < n).$$

   Soit $\mathfrak{M}$ la sous-structure de $\mathfrak{N}$ de domaine $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$.

4. On considère $\mathfrak{M}'$ la sous-structure de $\mathfrak{N}$ de domaine $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times 2\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}'$. A-t-on $\mathfrak{M}' \prec \mathfrak{N}$?