Université Lyon 1 / ENS Lyon Semestre de printemps 2017-2018
M1A Logique et Théorie des Ensembles

Examen du 2 mai 2018, durée 3h.

Le sujet est constitué de cinq problèmes indépendants. Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la rédaction des copies.

Problème 1. Soit G un groupe dans le langage des groupes. On suppose que G contient au moins un élément d'ordre n pour chaque entier $n \geq 1$.

1. Écrire dans le langage des groupes l'énoncé qui exprime que G a un élément d'ordre n. Montrer qu'il existe une extension élémentaire de G contenant un élément d'ordre infini.
2. Soit $\varphi(x)$ une formule à paramètres dans G satisfaite par tous les éléments d'ordre fini de G. Montrer qu'il existe un élément d'ordre infini qui satisfait $\varphi(x)$ dans une extension élémentaire de G.
3. On considère maintenant le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ dans le langage des corps. Montrer que l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon \exists n \in \mathbb{N}\, z^n = 1\}$$

n'est pas définissable dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de formule du premier ordre $\psi(x)$ à paramètres dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathbb{C} \models \psi(z)\}$).

Problème 2. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux structures dans un même langage. Montrer que si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sont ∞-équivalentes et que $\mathfrak{M}$ est ω-saturée alors $\mathfrak{N}$ est ω-saturée.

Problème 3. Soit le langage $L = \{<, c_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des symboles de constantes. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémités telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $c_i < c_{i+1}$ (on entend par $<$ un ordre strict).

1. Écrire les énoncés de L qui expriment ces propriétés.
2. Expliciter un modèle de T.
3. Montrer qu'un modèle de T est ω-saturé, si et seulement si, l'ensemble de ses éléments majorant toutes les interprétations des c_i n'a pas de plus petit élément.
   (Indication : pour la réciproque on pourra utiliser le résultat du problème 2.)
4. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.
5. Montrer que $|S_n(T)| = \aleph_0$ pour tout $n \in \omega$, $n > 0$.
6. Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).
7. Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
8. Montrer qu'il existe deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre.

Problème 4. On appelle ordre linéaire la donnée d'un ensemble muni d'un ordre total strict. Si $(I, <)$ est un ordre linéaire et $(A_i, <)_{i \in I}$ est une famille d'ordres linéaires, on munit l'ensemble $\bigcup\limits_{i \in I} \{i\} \times A_i$ de l'ordre total strict suivant :

$$(i, x) < (j, y) \text{ si et seulement si } i < j \text{ ou } (i = j \text{ et } x < y).$$

On note alors $\sum\limits_{i \in I} A_i$ l'ordre linéaire $(\bigcup\limits_{i \in I} \{i\} \times A_i, <)$.
Pour la suite, on considère un cardinal infini κ et on note A l'ordre linéaire $\mathbb{Q} + 2 + \mathbb{Q}$ (une copie des rationnels, suivie de deux points discrets, suivis d'une copie de $\mathbb{Q}$), et B l'ordre linéaire $\mathbb{Q} + 3 + \mathbb{Q}$.

1. Soit $X \subset \kappa$. Pour tout ordinal $\alpha < \kappa$, on pose

   $$C_\alpha = \begin{cases} A \text{ si } \alpha \in X \\ B \text{ si } \alpha \notin X \end{cases},$$

   et on note L_X l'ordre linéaire $\sum\limits_{\alpha < \kappa} C_\alpha$.

   Montrer que si X et Y sont deux parties différentes de κ alors les ordres linéaires L_X et L_Y ne sont pas isomorphes.
2. En déduire qu'il existe 2^κ ordres linéaires de cardinalité κ non isomorphes.

Problème 5.

1. Montrer que si U est un ultrafiltre et $X \cup Y \in U$ alors $X \in U$ ou $Y \in U$.
2. Soit U un ultrafiltre sur S. Montrer que l'ensemble des $X \subset S \times S$ tel que

   $$\Big\{a \in S : \{b \in S : (a, b) \in X\} \in U\Big\} \in U$$

   est un ultrafiltre sur $S \times S$.