Université Lyon 1 / ENS Lyon Semestre de printemps 2017-2018
M1A Logique et Théorie des Ensembles

Examen du 2 mai 2018, durée 3h.

Le sujet est constitué de cinq problèmes indépendants. Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la rédaction des copies.

Problème 1. *Soit G un groupe dans le langage des groupes. On suppose que G contient au moins un élément d'ordre n pour chaque entier $n \geq 1$.*

1. *Écrire dans le langage des groupes l'énoncé qui exprime que G a un élément d'ordre n. Montrer qu'il existe une extension élémentaire de G contenant un élément d'ordre infini.*
   Réponse : D'abord l'énoncé du premier ordre :
   $$\exists x \; (\underset{n \text{ fois}}{x \cdot \ldots \cdot x} = 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \underset{i \text{ fois}}{x \cdot \ldots \cdot x} \neq 1)$$
   Maintenant on passe à la démonstration de l'existence d'une extension élémentaire qui contient un élément d'ordre infini. On ajoute au langage des groupes un symbole de constante c_g pour chaque $g \in G$ et un autre symbole de constante, disons d, et on considère l'ensemble suivant d'énoncés dans ce langage élargi :
   $$\mathrm{Th}(G, \{g \in G\}) \cup \{d^n \neq 1 | n \in \mathbb{N}^*\} \; .$$
   Le sens de l'abbréviation d^n est l'évident. Une partie finie de cet ensemble d'énoncés est de la forme suivante :
   $$\{\theta, d^{n_1} \neq 1, \ldots, d^{n_k} \neq 1\} \; ,$$
   où θ est un énoncé de $\mathrm{Th}(G, \{g \in G\})$. Le groupe G, vu comme une structure du langage élargi, est un modèle de cet ensemble dans lequel d est interprété par un élément du groupe d'ordre strictement supérieur à $\max(n_1, \ldots, n_k)$. Par l'hypothèse sur G, un tel élément existe. Par compacité, l'ensemble entier a un modèle. Ce modèle contient un élément d'ordre infini et il est extension élémentaire de G puisqu'il est modèle de $\mathrm{Th}(G, \{g \in G\})$.
2. *Soit $\varphi(x)$ une formule à paramètres dans G satisfaite par tous les éléments d'ordre fini de G. Montrer qu'il existe un élément d'ordre infini qui satisfait $\varphi(x)$ dans une extension élémentaire de G.*
   Réponse : Cette fois-ci, on considère l'ensemble d'énoncés
   $$\mathrm{Th}(G, \{g \in G\}) \cup \{d^n \neq 1 | n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\varphi(d)\}$$
   dans le même langage élargi du point précédent.
3. *On considère maintenant le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ dans le langage des corps. Montrer que l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité*
   $$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon \exists n \in \mathbb{N} \; z^n = 1\}$$
   n'est pas définissable dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de formule du premier ordre $\psi(x)$ à paramètres dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathbb{C} \models \psi(z)\}$).

Réponse : Par l'absurde, on suppose qu'il existe une formule ψ définissant avec paramètres dans $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{U}$. On ajoute au langage des corps un symbole de constante, disons d, et éventuellement d'autres symboles qui seront interprétés comme les paramètres utilisés pour définir l'ensemble $\mathbb{U}$. Dans ce langage, on considère l'ensemble suivant d'énoncés :

$$\mathrm{Th}(\mathbb{C}, d) \cup \{\psi(d), \overset{d\cdot\ldots\cdot d}{n\text{fois}} \neq 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\} .$$

Un raisonnement de compacité similaire aux points précédents montre que cet ensemble est consistant avec $\mathrm{Th}(\mathbb{C})$. Or, cet ensemble d'énoncés n'utilise qu'un nombre fini de symboles de constantes, à savoir, d et ceux nommant les paramètres de la formule ψ. Par ailleurs, $\mathbb{C}$ est un modèle ω-saturé de $\mathrm{Th}(\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe une réalisation de cet ensemble dans $\mathbb{C}$. Ceci contredit que U ne contient que des éléments d'ordre fini.

Problème 2. *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux structures dans un même langage. Montrer que si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sont ∞-équivalentes et que $\mathfrak{M}$ est ω-saturée alors $\mathfrak{N}$ est ω-saturée.*

Réponse : Soit q un type de $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, d_1, \ldots, d_k)$ avec $\{d_1, \ldots, d_k\} \subset N$. On montrera que, sous les hypothèses de l'exercice, ce type se réalise dans $\mathfrak{N}$.

La proposition 4.29 des notes de cours montre qu'il existe $c_1, \ldots, c_k$ tels que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(c_1, \ldots, c_k) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(d_1, \ldots, d_k)$. On définit ensuite l'ensemble p de formules à paramètres dans $\{c_1, \ldots, c_k\}$ en remplaçant dans chaque formule de q les paramètres $(d_1, \ldots, d_k)$ par $(c_1, \ldots, c_k)$, et on démontre que p est un type de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, c_1, \ldots, c_k)$. Montrons d'abord que p est finiment satisfaisable. En effet, si $\varphi_1(x, d_1, \ldots, d_k), \ldots, \varphi_m(x, d_1, \ldots, d_k)$ sont des formules de q, alors $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi_1(x, d_1, \ldots, d_k) \wedge \ldots \wedge \varphi_m(x, d_1, \ldots, d_k)$. Comme $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ∞-équivalentes, il existe $a \in M$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi_1(a, c_1, \ldots, c_k) \wedge \ldots \wedge \varphi_m(a, c_1, \ldots, c_k)$. Ceci démontre que p est finiment satisfaisable. La maximalité de p découle de celle de q. On en conclut que p est un type.

Comme p est un type sur un ensemble fini de paramètres et que $\mathfrak{M}$ est une structure ω-saturée, il est réalisé dans $\mathfrak{M}$ par un élément α dans $\mathfrak{M}$. La proposition 4.29 des notes de cours permet de conclure que q est réalisé dans $\mathfrak{N}$ par l'image d'un isomorphisme partiel qui étend un isomorphisme partiel transformant $(c_1, \ldots, c_k)$ en $(d_1, \ldots, d_k)$ à $(\alpha, c_1, \ldots, c_k)$.

Problème 3. *Soit le langage $L = \{<, c_i : i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des symboles de constantes. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémités telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $c_i < c_{i+1}$ (on entend par $<$ un ordre strict).*

1. *Écrire les énoncés de L qui expriment ces propriétés.*

   Réponse : Le rédacteur a déjà écrit maintes fois sur le tableau les énoncés décrivant une relation d'ordre dense sans extrémités.

2. *Expliciter un modèle de T.*

   Réponse : L'ensemble des rationnels muni de l'ordre usuel des rationnels dans lequel on interprète les c_i par les nombres naturels est un modèle. Le même ensemble dans lequel on distingue les c_i par $1 - \frac{1}{i+1}$ en est un autre non isomorphe au premier. Finalement, toujours les rationnels dans lequel les c_i sont interprétés par $\sqrt{3} - \frac{1}{i+1}$ est encore un autre modèle qui n'est d'ailleurs pas isomorphes aux deux premiers exemples.

3. *Montrer qu'un modèle de T est ω-saturé, si et seulement si, l'ensemble de ses éléments majorant toutes les interprétations des c_i n'a pas de plus petit élément.*
   (Indication : pour la réciproque on pourra utiliser le résultat du problème 2.)

Réponse : Il y avait une erreur dans l'énoncé. La condition caractérisant l'ω-saturation doit être la suivante : l'ensemble de ses éléments majorant toutes les interprétations des c_i n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément.

Continuons. On admet d'abord que $\mathfrak{M}$ est un modèle ω-saturé de T. L'ensemble de formules $\{c_i < x | i < \omega\}$ est sans paramètres et consistant avec $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ par compacité. Comme il n'utilise aucun paramètre, il est réalisé dans $\mathfrak{M}$. Ceci montre que l'ensemble d'éléments majorant toutes les interprétations des c_i n'est pas vide. Supposons maintenant que cet ensemble ait un plus petit élément m. Alors, l'ensemble des formules $\{c_i < x | i < \omega\} \cup \{x < m\}$ est consistant avec $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ et n'utilise que m comme paramètre. Alors, il est réalisé dans $\mathcal{M}$, ce qui contredit la minimalité de m. Ceci démontre la nécessité de la condition.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit maintenant $\mathfrak{M}$ un modèle de T jouissant de la propriété décrite dans la condition. Il suffira, d'après le problème précédent, de montrer que $\mathfrak{M}$ est ∞-équivalent à un modèle ω-saturé de T. Soit $\mathfrak{N}$ un modèle ω-saturé de T. Soient A et B des sous-structures isomorphes de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ respectivement. On admettra qu'elles sont finies modulo les $c_i^{\mathfrak{M}}$ et $c_i^{\mathfrak{N}}$ respectivement. En d'autres termes, au delà des $\{c_i^{\mathfrak{M}} | i < \omega\}$ et $\{c_i^{\mathfrak{N}} | i < \omega\}$ qu'elles contiennent respectivement par la définition d'une sous-structure, A et B ont chacune un nombre fini d'éléments. Si on ajoute à A un élément α de $\mathfrak{M}$, il existe trois cas par rapport aux $c_i^{\mathfrak{M}}$. Soit $\alpha < c_0^{\mathfrak{M}}$, soit il existe $i < \omega$ tel que $c_i^{\mathfrak{M}} < \alpha < c_{i+1}^{\mathfrak{M}}$, soit $c_i^{\mathfrak{M}} < \alpha$ pour tout $i < \omega$. Comme $\mathfrak{N}$ est ω-saturée, elle jouit de la propriété sur les éléments majorant les $c_i^{\mathfrak{N}}$. On peut alors trouver un élément β satisfaisant les conditions de chaque cas. En plus, la densité de l'ordre sous-jacent permet de choisir β qui satisfait les mêmes conditions de positionnement de α par rapport aux éléments de $A \setminus \{c_i^{\mathfrak{M}} | i < \omega\}$. Pour le sens inverse du raisonnement de va-et-vient, on fait le même type de raisonnement en remplaçant l'hypothèse d'ω-saturation par celle sur les $c_i^{\mathfrak{M}}$. On conclut alors que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ∞-équivalentes. Le problème précédent montre alors que $\mathfrak{M}$ est ω-saturée.

4. *Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.*

   Réponse : La complétude et l'élimination des quanteurs se justifient par un va-et-vient similaire à celui détaillé dans le point précédent. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux modèles ω-saturés de T. On considère les isomorphismes partiels entre les sous-structures qui contiennent un nombre fini d'élément autres que les $\{c_i^{\mathfrak{M}} | i < \omega\}$ ($\{c_i^{\mathfrak{N}} | i < \omega\}$, respectivement). Cette famille n'est pas vide parce que $(\{c_i^{\mathfrak{M}} | i < \omega\}, <)$ et $(\{c_i^{\mathfrak{N}} | i < \omega\}, <)$ sont isomorphes. En plus, il s'agit d'une famille karpienne comme c'était vérifié dans le point précédent. De ces deux remarques découlent la complétude et l'élimination. Bien sûr, pour la complétude, il faut passer aux extensions élémentaires ω-saturées etc.

5. *Montrer que $|S_n(T)| = \aleph_0$ pour tout $n \in \omega$, $n > 0$.*

   Réponse : Si $(a_1, \dots, a_n)$ est un n-uplet non vide extrait d'un modèle $\mathfrak{M}$ ω-saturé de T, alors l'élimination des quanteurs nous montre que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)$ est déterminé par le positionnement des a_i par rapport aux $c_i^{\mathfrak{M}}$ et entre eux-mêmes. Plus précisément, pour un autre n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ extrait de $\mathfrak{M}$, $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si les condition suivant sont satisfaites :

   — $a_i < a_j$ si et seulement si $b_i < b_j$ pour $1 \leq i, j \leq n$;

   — $a_i < c_0^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si $b_i < c_0^{\mathfrak{M}}$ pour $1 \leq i \leq n$;

   — pour tout $1 \leq i \leq n$, $c_j^{\mathfrak{M}} < a_i$ pour tout $j < \omega$ si et seulement si $c_j^{\mathfrak{M}} < b_i$ pour tout $j < \omega$.

   Pour chaque $0 < n < \omega$, ces conditions décrivent $\aleph_0$ possibilités.

6. *Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).*

   Réponse : Le deuxième exemple du point 2 a la propriété mentionnée dans l'énoncé.

7. *Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.*

   Réponse : Dans le deuxième point, nous avons explicité trois modèles non isomorphes deux à deux. Montrons maintenant qu'un modèle arbitraire dénombrable de T est isomorphe à l'un de ces trois. Soit donc $\mathfrak{M}$ un modèle dénombrable arbitraire de T. On notera $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ les trois modèles explicités dans la réponse à la question 2. Il y a trois possibilités pour $\mathfrak{M}$:

   <u>Cas 0</u> les $c_i^{\mathfrak{M}}$ ne sont majorés par aucun point de $\mathfrak{M}$;

   <u>Cas 1</u> les $c_i^{\mathfrak{M}}$ ont un plus petit majorant dans $\mathfrak{M}$;

   <u>Cas 2</u> les $c_i^{\mathfrak{M}}$ sont majorés et n'ont pas de plus petit majorant.

   On fera une étude cas par cas en utilisant la notation des intervalles : on note $]-\infty, c_0^{\mathfrak{M}}[= \{x \in M | x < c_0^{\mathfrak{M}}\}$, $]c_i^{\mathfrak{M}}, c_{i+1}^{\mathfrak{M}}[= \{x \in M | c_i^{\mathfrak{M}} < x < c_{i+1}^{\mathfrak{M}}\}$, $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}} = \{x \in M | c_i^{\mathfrak{M}} < x \text{ pour tout } i < \omega\}$. Comme la relation d'ordre de $\mathfrak{M}$ est un ordre total, dense, sans extrémités, il en est de même pour chacun de ces intervalles sauf $I_{+\infty}$. Ce dernier intervalle peut être vide, ou non vide mais avec un plus petit élément, donc isomorphe à l'intervalle fermé $[q, +\infty[$ des rationnels avec q un rationnel arbitraire, ou non vide et sans extrémités. Ces trois possibilités correspondent respectivement aux trois cas ci-dessous.

   <u>Cas 0</u> Dans ce cas, l'intervalle $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}}$ est vide. On établit l'isomorphisme suivant par recollement entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_0$: les intervalles $]-\infty, c_0^{\mathfrak{M}}[$ et $]-\infty, c_0^{\mathfrak{M}_0}[$ se correspondent par un isomorphisme $\sigma_{-\infty}$. Pour tout $i < \omega$, chaque paire d'intervalles $]c_i^{\mathfrak{M}}, c_{i+1}^{\mathfrak{M}}[$ et $]c_i^{\mathfrak{M}_0}, c_{i+1}^{\mathfrak{M}_0}[$ se correspondent par un isomorphisme σ_i. On recolle ces isomorphismes en associant chaque paire de $c_i^{\mathfrak{M}}$ et $c_i^{\mathfrak{M}_0}$. Cette construction montre que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_0$ sont isomorphes.

   <u>Cas 1</u> Dans ce cas, on fait une construction similaire en associant le plus petit élément de $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}}$ à 1 dans $\mathfrak{M}_1$ et les autres éléments de $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}}$ à ceux de $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}_1}$ par l'intermédiaire d'un isomorphisme quelconque entre deux ensembles dénombrables ordonnés par un ordre total, dense, sans extrémités. Alors, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$ sont isomorphes.

   <u>Cas 2</u> Cette fois-ci, on fait un recollement pour montrer que $\mathfrak{M}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}_2$. Dans ce cas, l'intervalle $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}}$ est isomorphe à $I_{+\infty}^{\mathfrak{M}_2}$ car tous les deux sont deux ensembles dénombrables munis d'un ordre total, dense, sans extrémités.

8. *Montrer qu'il existe deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre.*

   Réponse : Dans la notation du point précédent, $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ ont cette propriété. Ceci découle du fait que si q est un rationnel arbitraire, alors $[q, +\infty[$ se plonge, par l'inclusion simple, dans $\mathbb{Q}$, et que, inversement, l'isomorphisme entre $]q, +\infty[$ et $\mathbb{Q}$ induit un plongement de $\mathbb{Q}$ dans $[q, +\infty[$.

Problème 4. *On appelle ordre linéaire la donnée d'un ensemble muni d'un ordre total strict. Si $(I, <)$ est un ordre linéaire et $(A_i, <)_{i \in I}$ est une famille d'ordres linéaires, on munit l'ensemble $\bigcup_{i \in I} \{i\} \times A_i$ de l'ordre total strict suivant :*

$$(i, x) < (j, y) \text{ si et seulement si } i < j \text{ ou } (i = j \text{ et } x < y).$$

On note alors $\sum\limits_{i\in I} A_i$ *l'ordre linéaire* $(\bigcup\limits_{i\in I}\{i\}\times A_i, <)$.
Pour la suite, on considère un cardinal infini κ *et on note* A *l'ordre linéaire* $\mathbb{Q}+2+\mathbb{Q}$ *(une copie des rationnels, suivie de deux points discrets, suivis d'une copie de* $\mathbb{Q}$*), et* B *l'ordre linéaire* $\mathbb{Q}+3+\mathbb{Q}$ *.*

1. *Soit* $X\subset\kappa$*. Pour tout ordinal* $\alpha<\kappa$*, on pose*

$$C_\alpha=\left\{\begin{array}{l} A \textit{ si } \alpha\in X \\ B \textit{ si } \alpha\notin X \end{array}\right. ,$$

   et on note L_X *l'ordre linéaire* $\sum\limits_{\alpha<\kappa} C_\alpha$*.*
   Montrer que si X *et* Y *sont deux parties différentes de* κ *alors les ordres linéaires* L_X *et* L_Y *ne sont pas isomorphes.*
2. *En déduire qu'il existe* 2^κ *ordres linéaires de cardinalité* κ *non isomorphes.*

Réponse : 1. On utilisera la notation de l'énoncé. Nous commençons avec quelques remarques.

1. On appelle deux points *consécutifs* dans une structure ordonnée, deux points distincs entre lesquels il n'existe pas de troisième point. Par conséquent, la structure A en a exactement 2 et la structure B exactement 3.
2. Il découle de la dernière phrase du point précédent que A et B ne sont pas isomorphes en tant que structures ordonnées puisque sous l'action d'un tel isomorphisme deux points consécutifs se transforment en deux points consécutifs.
3. Si $\alpha<\beta<\kappa$, alors les points consécutifs de C_α sont séparés de ceux de C_β par au moins une copie de $\mathbb{Q}$.

Comme $X\neq Y$, l'ensemble $\{\alpha<\kappa|\alpha\in X\backslash Y\cup Y\backslash X\}$ est non vide. Il contient par conséquent un plus petit élément. On le notera μ. On peut supposer que $\mu\in X\setminus Y$. Si on note $L_X=\sum_{\alpha\in\kappa}C_\alpha$ et $L_Y=\sum_{\alpha\in\kappa}C'_\alpha$, alors $C_\mu\cong\mathbb{Q}+2+\mathbb{Q}$ et $C'_\mu\cong\mathbb{Q}+3+\mathbb{Q}$. Il existe deux possibilités pour μ :

1. $\mu=0$

Dans ce cas, $C_0\cong\mathbb{Q}+2+\mathbb{Q}$ et $C_0\cong\mathbb{Q}+3+\mathbb{Q}$. Un isomorphisme entre L_X et L_Y doit transformer les 2 points consécutifs de C_0 en les trois points consécutifs de C'_0. Ceci n'est pas possible.

2. $\mu>0$

Dans ce cas, pour tout $\alpha<\mu$, C_α, et C'_α sont isomorphes à $\mathbb{Q}+3+\mathbb{Q}$. Un isomorphisme qui envoie L_X sur L_Y envoie les points consécutifs $\sum_{\alpha<\mu}C_\alpha$ sur les points consécutifs de $\sum_{\alpha<\mu}C'_\alpha$. Ceci force la même transformation sur les points consécutifs de C_μ et C'_μ. Or, ceci est impossible.

2. Le premier point montre qu'il existe au moins 2^κ ordres linéaires de cardinalités κ puisque chaque L_X est de cardinal κ. Par ailleurs, une relation d'ordre est une relation binaire sur un ensemble, donc un sous-ensemble du carré cartésien de cet ensemble. Dans notre cas, il s'agit de sous-ensembles de $\kappa\times\kappa$. Or, ce dernier est de cardinal κ. Par consquent, il y a au plus 2^κ ordres linéaires non isomorphes.

Une autre réponse est possible : Le raisonnement suivant se base sur une réponse dans les copies pour la question 1.

On remarque que A et B ont un seul point qui a un successeur et mais pas de prédécesseur, et qu'uniquement dans le cas de B, le successeur de ce point a également un successeur. Les propriétés sur ces points sont également vérifiées pour les points correspondants des copies de A et B dans L_X.

Notons S_X l'ensemble des points de L_X qui ont un successeur mais pas de prédécesseur. Par les remarques précédentes, S_X muni de l'ordre induit est isomorphe à κ et pour tout $\alpha < \kappa$, si on note x_α le α-ième point de S_X, on a $\alpha \in X$ si et seulement si dans L_X, le successeur de x_α n'a pas de successeur. Ainsi, l'application $X \to L_X$ est injective. Il en découle que pour différents X et Y on obtient des ordres L_X et L_Y non isomorphes.

Problème 5.

1. *Montrer que si U est un ultrafiltre et $X \cup Y \in U$ alors $X \in U$ ou $Y \in U$.*
2. *Soit U un ultrafiltre sur S. Montrer que l'ensemble des $X \subset S \times S$ tel que*

$$\Big\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in X\} \in U\Big\} \in U$$

est un ultrafiltre sur $S \times S$.

Réponse : 1. Soient U, X, Y comme dans l'énoncé. Appelons E l'ensemble ambiant. Si $X \notin U$ et $Y \notin U$, alors comme U est un ultrafiltre, $E \setminus X \in U$ et $E \setminus Y \in U$. Alors $(E \setminus X) \cap (E \setminus Y) = E \setminus (X \cup Y) \in U$. Ceci contredit l'hypothèse $X \cup Y \in U$.

2. On notera V l'ensemble de la question. Soient U et S comme dans l'énoncé. L'ensemble vide n'appartient pas à V car sinon il appartiendrait à U aussi. Comme S appartient à U et que pour tout $a \in S$ $S = \{b \in S | (a,b) \in S \times S\}$, on conclut que $S \times S$ appartient à V.
Maintenant, soient X et Y deux ensembles dans V. Nous montrerons que $X \cap Y$ appartient à V. On note X_1 (Y_1, respectivement) l'ensemble $\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in X\} \in U\}$ ($\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in Y\} \in U\}$, respectivement). Alors $X_1, Y_1 \in U$, et il en est de même pour $X \cap Y$. Pour tout élément $a \in X_1 \cap Y_1$, les ensembles $X_2(a) = \{b \in S : (a,b) \in X\}$ et $Y_2(a) = \{b \in S : (a,b) \in Y\}$ appartiennent à U. Il en est de même pour leur intersection. Or $X \cap Y \supset \{(a,b) \in S : a \in X_1 \cap Y_1$ et $b \in X_1(a) \cap Y_1(a)\}$. Ainsi, $\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in X \cap Y\} \in U\} \subset X_1 \cap Y_1$ d'où $X \cap Y \in V$.
Maintenant, soient $X \in V$ et $Y \subset S$ tels que $X \subset Y$. Nous montrerons que $Y \in V$. Il suffit en fait de constater que $\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in Y\} \in U\} \supset \{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in X\} \in U\}$. Comme U est un filtre, on conclut que $Y \in V$.
Nous avons montré que V est un filtre. Il reste à montrer la propriété pour les complémentaires. Soit donc $X \subset S \times S$ tel que $X \notin V$. Alors, $\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in X\} \in U\} \notin U$. Comme U est un ultrafiltre, $\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \in X\} \notin U\} \in U$. Comme U est un ultrafiltre, $\{b \in S : (a,b) \in X\} \notin U$ si, et seulement si, $\{b \in S : (a,b) \notin X\} \in U$. Par conséquent, $\{a \in S : \{b \in S : (a,b) \notin X\} \in U\} \in U$. Ceci équivaut à dire que $S \times S \setminus X \in V$.