Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2010/2011
Master 1 | Introduction à la Logique mathématique[1]

Théorie des modèles
DM 4.

Soit $\mathcal{M}$ une L-structure. On fixe un entier n. Rappelons qu'une partie X de M^n est définissable dans $\mathcal{M}$ sur des paramètres $b_1, \ldots, b_k \in M$ s'il existe une formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ de L telle que

$$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n : \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k)\}.$$

On note $\mathrm{D}_n(\mathcal{M})$ l'ensemble des parties de M^n définissables dans $\mathcal{M}$ (sur des paramètres dans M). On définit par récurrence un sous-ensemble $\mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M})$ de $\mathrm{D}_n(\mathcal{M})$ pour chaque ordinal α de la façon suivante :

– $\mathrm{D}_n^0(\mathcal{M}) = \mathrm{D}_n(\mathcal{M}) \setminus \{\emptyset\}$;

– $\mathrm{D}_n^{\alpha+1}(\mathcal{M}) = \left\{ X \in \mathrm{D}_n(\mathcal{M}) : \begin{array}{l} \text{il existe une famille infinie } (X_i)_{i<\omega} \text{ de parties deux à deux disjointes de } X \\ \text{tel que chaque } X_i \in \mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M}) \end{array} \right\}$;

– si α est un ordinal limite, $\mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M}) = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathrm{D}_n^\beta(\mathcal{M})$.

1. Donner une autre caractérisation de l'ensemble $\mathrm{D}_n^1(\mathcal{M})$.
2. Soit $X, Y \in \mathrm{D}_n(\mathcal{M})$ tel que $X \subseteq Y$ et $X \in \mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M})$ pour un ordinal α. Montrer qu'alors $Y \in \mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M})$.
3. Soit $X \in \mathrm{D}_n^0(\mathcal{M})$. On dit que X est de rang (de Cantor Bendixon) infini si $X \in \mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M})$ pour tout ordinal α et on note $R(X) = \infty$. Montrer que si X n'est pas de rang infini, il existe un plus grand ordinal α tel que $X \in \mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M})$. Dans ce cas on dit que X est de rang (de Cantor Bendixon) α et on note $R(X) = \alpha$.
4. Par convention $\infty > \alpha$ pour tout ordinal α. Montrer que pour tout ordinal α et tout $X \in \mathrm{D}_n^0(\mathcal{M})$,
$$R(X) \geq \alpha \text{ si et seulement si } X \in \mathrm{D}_n^\alpha(\mathcal{M}).$$
5. Montrer que pour tout $X, Y \in \mathrm{D}_n^0(\mathcal{M})$,
$$R(X \cup Y) = \max(R(X), R(Y)).$$
6. Soit $X \in \mathrm{D}_n^0(\mathcal{M})$ de rang $\alpha < \infty$. Montrer qu'il existe un plus grand entier k tel que X se partitionne en k parties de rang α. On appelle cet entier k le degré de X que l'on note $\deg(X)$.
7. Soit X et Y deux parties définissables disjointes de même rang $\alpha < \infty$. Montrer que
$$\deg(X \cup Y) = \deg(X) + \deg(Y).$$
8. On considère à partir de maintenant une structure de groupe $\mathcal{G}$ et on suppose que son domaine G est de rang $\alpha < \infty$ en tant qu'élément de $\mathrm{D}_1(\mathcal{G})$. Soit $A \in \mathrm{D}_1^0(\mathcal{M})$ et $g \in G$. Vérifier que $R(gA) = R(A)$ et $\deg(gA) = \deg(A)$.
9. Soit H un sous-groupe définissable de G.
   (a) Si H est d'indice infini dans G que peut-on dire du rang de H par rapport au rang de G ?
   (b) Si H est d'indice fini dans G que peut-on dire du rang et du degré de H en fonction du rang et du degré de G ?
10. Montrer qu'il n'existe pas de suites infinies strictement décroissantes de sous-groupes définissables de G.
11. En déduire que pour toute partie A de G le centralisateur $C_G(A) = \{g \in G : ga = ag \text{ pour tout } a \in A\}$ est définissable dans $\mathcal{G}$.

1. Page du cours : `http://math.univ-lyon1.fr/~blossier/M1Logique2011/`