

Thomas Blossier · Amador Martin-Pizarro · Frank O. Wagner

Géométries relatives

Received August 28, 2009 and in revised form May 19, 2013

Abstract. In this paper, we shall study type-definable groups in a simple theory with respect to one or several stable reducts. While the original motivation came from the analysis of definable groups in structures obtained by Hrushovski’s amalgamation method, the notions introduced are in fact more general, and in particular can be applied to certain expansions of algebraically closed fields by operators. We prove the following (Theorem 3.1) :

Theorem. *Let T be simple and T_0 be a stable reduct of T . If G is a type-definable group in T , then there are a $*$ -interpretable group H in T_0 and a definable homomorphism $\phi : G^0 \rightarrow H$ such that for independent generic elements g, g' of G we can name a set D independent of g, g' with*

$$\text{acl}(g), \text{acl}(g') \quad \downarrow^0 \quad \text{acl}(gg'),$$

$$\text{acl}(\phi(gg')) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(\phi(g)), \text{acl}(\phi(g')))$$

where \downarrow^0 and acl_0 denote independence and algebraic closure respectively in the reduct T_0 over D .

Thus ϕ captures all possible 0-dependence relations resulting from the group operation. In order to ensure that the morphism is non-trivial, we need to add further hypotheses on the geometric complexity of T over T_0 : *relative one-basedness* and *relative CM-triviality*. The kernel of ϕ is finite in the first case (Theorem 4.9) and virtually central in the latter (Theorem 5.7).

Examples for relatively one-based theories are differentially closed fields in characteristic 0 and fields with a generic automorphism. We therefore recover, up to isogeny, the characterisation of definable groups in these structures from [20, 24]. Finally, we show that all coloured fields and fusions constructed by Hrushovski amalgamation are relatively CM-trivial (Theorem 6.4).

Keywords. Model theory, amalgamation methods, CM-triviality, geometry, group, definability

1. Introduction

Un théorème de Pillay [24] affirme que tout groupe différentiellement constructible se plonge dans un groupe algébrique. Kowalski et Pillay [20] ont obtenu un résultat analogue pour les groupes constructibles connexes sur un corps aux différences, modulo un

T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. O. Wagner : Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France ; e-mail: blossomier@math.univ-lyon1.fr, pizarro@math.univ-lyon1.fr, wagner@math.univ-lyon1.fr

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 03C45

noyau fini [11]. Ces deux exemples nous montrent que des groupes *définissables* dans des structures *enrichies* peuvent être analysés à partir de la structure de base. Dans les deux cas précédents, la démonstration consiste à passer de relations dans les corps enrichis à des relations purement algébriques dans une certaine configuration géométrique, dite *configuration de groupe*. À partir d'une telle configuration on récupère un groupe [15] qui sera ici algébrique.

Il s'avère que des propriétés d'un groupe définissable dans une structure dépendent de l'existence de certains types de configurations géométriques. Un pseudo-plan généralise la notion d'incidence entre points et droites existant dans un plan euclidien. Une structure interprétant un pseudo-plan (complet) est *1-ample* et cette configuration peut être généralisée pour chaque n : une géométrie *n-ample* correspond à l'existence d'un pseudo-espace en dimension n , ce qui nous donne toute une hiérarchie de complexités géométriques (hiérarchie conjecturée stricte, voir Evans [14]). Notons qu'un corps algébriquement clos est *n-ample* pour tout n .

Une structure est *monobasée* si elle n'est pas 1-ample. D'après Hrushovski et Pillay [19] un groupe stable monobasé est abélien-par-fini et possède des propriétés de rigidité remarquables : tout sous-ensemble définissable est une combinaison booléenne de translatés de sous-groupes définissables (en fait de sous-groupes définissables sur la clôture algébrique du vide, ce qui entraîne qu'il n'y a qu'un nombre borné de sous-groupes définissables). Cette propriété est à la base de la démonstration modèle-théorique donnée par Hrushovski [18] de la conjecture de Mordell–Lang, qui réside dans la caractérisation des géométries associées aux types minimaux différentiels de variétés semi-abéliennes.

Dans le cas des structures non-2-amples (aussi appelées *CM-triviales* par Hrushovski [17]), Pillay [22] a montré que les groupes de rang de Morley fini sont nilpotents-par-fini ; ce résultat a été généralisé à certains groupes stables [34].

Dans cet article, nous définissons des notions de 1-ampleur et 2-ampleur relatives à un réduit par rapport à un opérateur de clôture. En imposant des propriétés supplémentaires à cet opérateur de clôture, nous réussissons à caractériser les groupes type-définissables dans de telles structures par rapport à ceux du réduit. On montre dans le cas relativement monobasé que tout groupe type-définissable a un sous-groupe d'indice borné qui se plonge définissablement modulo un noyau fini dans un groupe interprétable dans le réduit (Théorème 4.9). Les corps différentiellement clos et les corps munis d'un automorphisme générique sont des exemples de structures relativement monobasées (c'est-à-dire non 1-amples) au-dessus du pur corps algébriquement clos sous-jacent. On retrouve ainsi (Corollaire 4.11) les théorèmes de Kowalski–Pillay et de Pillay (quoique pour un groupe différentiel on obtienne seulement une monogénie, c'est-à-dire un plongement d'un sous-groupe d'indice fini modulo un noyau fini). Dans le cas relativement CM-trivial, à partir d'un groupe type-définissable on construit un homomorphisme définissable, dont le noyau est virtuellement central, d'un sous-groupe d'indice borné dans un groupe interprétable dans le réduit (Théorème 5.7). En particulier tout groupe simple type-définissable se plonge dans un groupe du réduit (Corollaire 5.10), ce qui permet de montrer que tout corps type-définissable est définissablement isomorphe à un sous-corps d'un corps définissable dans le réduit (Corollaire 5.11).

En utilisant la méthode d'amalgamation introduite par Hrushovski, diverses structures ayant des géométries exotiques furent construites : notamment des corps munis d'un prédicat pour un sous-ensemble (appelés corps *colorés* par Poizat) [25, 29, 1, 6, 4], ainsi que la fusion de deux théories fortement minimales [16, 7], ou de rang de Morley fini et rang et degré de Morley définissables [39]. Dans la dernière partie on vérifie que ces amalgames sont relativement CM-triviaux (c'est-à-dire non 2-amplés) au-dessus des théories de base. Notons que la CM-trivialité relative ne permet pas d'analyser tous les groupes définissables. Dans les corps colorés non collapsés, on vérifie facilement que tout groupe définissable connexe est l'extension d'un sous-groupe coloré par un groupe algébrique. Ceci n'est plus vrai pour certains groupes interprétables, comme le quotient du corps entier par le sous-groupe coloré. Notons que dans le cas collapsé de rang fini, tout groupe interprétable devient définissable par élimination des imaginaires [36].

Quant à la fusion, Hrushovski avait défini dans [17] une notion de *platitude* (absolute) qui empêche l'existence de groupes ; il affirme dans [16] que la fusion sur un réduit commun trivial est *plate* relativement aux théories de base, et que cela implique que tout groupe définissable est isomorphe à un produit direct, à centre fini près, de deux groupes définissables dans les deux théories de départ. Dans un travail en cours nous utilisons cette notion afin d'étudier les groupes abéliens.

Bien que ce papier demande une certaine connaissance d'outils modèle-théoriques (voir [26], [23] pour la stabilité et [35] pour la simplicité), une connaissance approfondie de la méthode d'amalgamation n'est pas nécessaire pour sa lecture (la partie 6 est indépendante et contient un rappel de cette méthode).

2. Prélude

Dans cet article nous allons considérer une théorie complète simple T dans un langage \mathcal{L} avec un réduit stable T_0 à un sous-langage \mathcal{L}_0 , ou encore avec une famille de réduits stables $(T_i : i < n)$ à des sous-langages \mathcal{L}_i . Les notions modèle-théoriques comme la clôture définissable dcl, la clôture algébrique acl, la clôture bornée bdd, les types tp, les bases canoniques Cb ou l'indépendance \downarrow s'entendent au sens de T ; si on les prend au sens de T_i on l'indiquera par l'indice i : dcl $_i$, acl $_i$, tp $_i$, Cb $_i$, \downarrow .

Rappelons que si E est une relation d'équivalence définissable sur un uplet fini a , alors la classe a_E de a modulo E est un *imaginaire* ; si E n'est que type-définissable et a un uplet possiblement infini (appelé **-uplet*), alors a_E est un *hyperimaginaire*. En particulier les **-uplets* eux-mêmes sont des hyperimaginaires. Les imaginaires possèdent les mêmes propriétés modèle-théoriques que les éléments et uplets ordinaires (appelés *réels*) ; ceci vaut aussi pour les hyperimaginaires, sauf que l'égalité de deux hyperimaginaires est un type partiel plutôt qu'une formule. Un ensemble est *définissable* s'il est donné par une formule, et *type-définissable* s'il est donné par un type partiel d'arité finie ; il est (*type-*) *interprétable* si la formule ou le type partiel portent sur des variables imaginaires ; un préfixe **-* indiquera que le nombre de variables (et de formules) est infini. Ainsi, si G est un groupe type-définissable (le domaine et le graphe de la multiplication le sont), on voit facilement que le graphe de la multiplication est en fait donné par une seule formule ;

ceci n'est plus vrai pour un groupe $*$ -définissable. Enfin, si les réduits éliminent complètement les imaginaires, alors interprétable équivaut à définissable ; nous avons maintenu la distinction afin d'indiquer quand on aborde l'imaginaire.

Remarquons que si E est une relation d'équivalence type-définissable dans T mais pas dans T_i , alors une classe modulo E n'a aucun sens dans T_i ; les hyperimaginaires de T n'existent pas nécessairement dans les réduits. On travaillera donc sauf mentions contraires uniquement avec des éléments réels ; en particulier les clôtures algébrique et définissable sont restreintes aux réels (même si on prend la clôture d'un ensemble d'hyperimaginaires). Par contre, la clôture bornée s'entend toujours au sens hyperimaginaire.

Afin d'avoir néanmoins un certain contrôle sur les imaginaires, nous supposons par la suite que les T_i éliminent géométriquement les imaginaires pour tout $i < n$, c'est-à-dire tout T_i -imaginaire est T_i -interalgébrique avec un uplet réel. Ceci est satisfait par exemple si les T_i sont fortement minimales avec $\text{acl}_i(\emptyset)$ infini. Notons en particulier que si nous travaillons avec un seul réduit T_0 , l'élimination géométrique de imaginaires est obtenu gratuitement en ajoutant les 0-imaginaires au langage.

Les énoncés principaux de cet article, notamment les Théorèmes 3.1, 4.9 et 5.7, restent valables si le groupe de départ est $*$ -définissable. Dans ce cas les groupes obtenus dans les réduits sont $*$ -interprétables.

Plus généralement, on pourrait partir de réduits qui ne sont que simples avec élimination géométrique des hyperimaginaires et utiliser le théorème de configuration de groupe pour les théories simples [8]. Nous ne voyons pas d'obstacle majeur à une extension de nos résultats à ce contexte, mais la non unicité des extensions non déviantes et le travail avec les presque-hyperimaginaires nécessiteraient des arguments supplémentaires que nous n'avons pas tenté de faire en détail.

Le lemme suivant, moins évident qu'il ne le semble à première vue, sera utilisé fréquemment dans cet article.

Lemme 2.1. *Si B est algébriquement clos (au sens de T) et $a \downarrow_B c$, alors $a \downarrow_B^0 c$.*

Démonstration. Comme la théorie T_0 est stable, il suffit de voir que $\text{tp}_0(a/Bc)$ ne divise pas sur B . Fixons $\varphi(x, y)$ une \mathcal{L}_0 -formule à paramètres sur B satisfaite par (a, c) . Considérons une suite de Morley $(c_j : j < \omega \cdot 2)$ de $\text{tp}(c/B)$. Alors $\bigwedge_i \varphi(x, c_i)$ est consistant, comme a et c sont indépendants sur B . Pour montrer que $\varphi(x, c)$ ne 0-divise pas, il suffit de montrer que $(c_j : j < \omega \cdot 2)$ est une 0-suite de Morley. Or, la 0-indiscernabilité ne posant aucun problème, il s'agit de montrer qu'elle est 0-indépendante sur B .

Remarquons que $(c_j : \omega \leq j < \omega \cdot 2)$ est 0-indépendante sur $(B, c_j : j < \omega)$ par stabilité, et forme donc une 0-suite de Morley de $\text{tp}_0(c_\omega/B, c_j : j < \omega)$. Puisque la base canonique d'un type est algébrique sur une suite de Morley de réalisations, on a

$$\text{Cb}_0(c_\omega/B, c_j : j < \omega) \subseteq \text{acl}_0^{\text{eq}}(B, c_j : j < \omega) \cap \text{acl}_0^{\text{eq}}(c_j : \omega \leq j < \omega \cdot 2).$$

Or, T_0 élimine géométriquement les imaginaires, B est algébriquement clos, et

$$(c_j : j < \omega) \downarrow_B (c_j : \omega \leq j < \omega \cdot 2).$$

Ceci implique que $\text{Cb}_0(c_\omega/B, c_j : j < \omega) \subseteq \text{acl}_0^{\text{eq}}(B)$, et donc

$$c_\omega \downarrow_B^0 (c_j : j < \omega).$$

Par indiscernabilité, la suite $(c_j : j < \omega \cdot 2)$ est bien 0-indépendante sur B . \square

3. Groupes et réduits

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème suivant, qui établit l'existence d'un homomorphisme d'un groupe T -définissable vers un groupe interprétable dans un réduit T_0 . Cet homomorphisme peut s'avérer trivial sans conditions supplémentaires, comme les non ampleurs relatives qui seront discutées dans les parties suivantes.

Théorème 3.1. *Soit T une théorie simple avec un réduit T_0 stable avec élimination géométrique des imaginaires. Tout groupe G type-définissable sur \emptyset dans T a un sous-groupe normal N type-définissable sur \emptyset et un sous-groupe type-définissable G_N d'indice borné dans G tel que G_N/N se plonge définissablement (à l'aide de paramètres A éventuels) dans un groupe H *-interprétable dans T_0 . De plus, pour tout $B \supseteq A$ et tous génériques indépendants g_0, g_1 de G sur $B \supseteq A$ il existe $D \supseteq B$ indépendant de g_0, g_1 sur B avec*

$$\text{acl}(g_0, D), \text{acl}(g_1, D) \quad \downarrow^0 \quad \text{acl}(g_0 g_1, D) \\ \text{acl}(g_0 g_1 N, D) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(g_0 N, D), \text{acl}(g_1 N, D))$$

Remarque 3.2. Rappelons que par définition $\text{acl}(gN, D)$ n'est constitué que d'éléments réels. Mais on choisira A tel que gN soit interalgébrique sur A avec un *-uplet réel. En particulier $gN \in \text{bdd}(\text{acl}(gN, D))$.

Notons aussi que G_N/N est un hyperimaginaire : Les éléments du quotient sont des classes modulo la relation d'équivalence type-définissable $x^{-1}y \in N$. Un plongement définissable dans H sera donc donné par un homomorphisme *-interprétable de G_N dans H dont le noyau est égal à N . (Le graphe d'un tel homomorphisme est l'image d'un ensemble *-définissable de $G_N \times X$ par la projection de $G_N \times X$ sur $G_N \times H$, où $H = X/E$ pour un ensemble *-définissable X et une relation d'équivalence *-définissable E .) Un tel plongement devrait être dit *hyperdéfinissable*, mais nous ne souhaitons pas alourdir la nomenclature.

Démonstration. Soit G un groupe T -type-définissable sur \emptyset . Rappelons que deux sous-groupes H et K de G sont dits *commensurables* si les indices de $H \cap K$ dans H et K sont bornés. On appellera un sous-groupe type-définissable (avec paramètres) $N \leq G$ *nucléaire* s'il est normal dans un sous-groupe type-définissable G_N d'indice borné dans G tel que G_N/N se plonge définissablement dans un groupe H_N *-interprétable dans T_0 .

Pour cette démonstration nous vérifions deux résultats préliminaires indépendants (Lemmes 3.3 et 3.4) que nous combinons ensuite pour conclure.

Lemme 3.3. *Il existe un sous-groupe nucléaire N de G type-définissable sur \emptyset et minimal à commensurabilité près parmi les sous-groupes nucléaires de G .*

Démonstration. Soit \mathcal{N} la famille des sous-groupes nucléaires de G ; notons qu'elle est non vide puisqu'elle contient G . Elle est évidemment invariante par \emptyset -automorphisme, et par automorphisme définissable de G (et en particulier par conjugaison). De plus, elle est stable par intersection bornée : si \mathcal{N}_0 est un sous-ensemble borné de \mathcal{N} alors l'intersection $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_0} N$ est type-définissable, normal dans $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_0} G_N$, et $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_0} G_N / \bigcap_{N \in \mathcal{N}_0} N$ se plonge définissablement dans le groupe $\prod_{N \in \mathcal{N}_0} H_N$, qui est $*$ -interprétable dans T_0 .

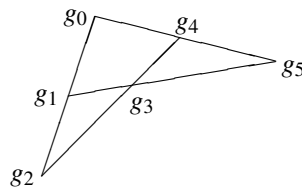
Si la théorie T est stable, l'intersection $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$ est égale à une sous-intersection de taille au plus $|T|$ et donc type-définissable (voir [33, Corollary 1.0.8]) ; elle est \emptyset -invariante puisque \mathcal{N} l'est. D'après le paragraphe précédent elle appartient à \mathcal{N} , ce qui permet de conclure.

Plus généralement d'après [35, Theorem 4.5.13] appliqué à \mathcal{N} il existe un sous-groupe N normal dans G et type-définissable sur \emptyset contenant un sous-groupe d'indice borné $N_1 \in \mathcal{N}$ et tel que chaque intersection d'un $N_2 \in \mathcal{N}$ avec N est d'indice borné dans N . Vérifions pour terminer que N est nucléaire. Posons $G_N = NG_{N_1}$. Alors, le quotient G_N/N est isomorphe au quotient $(G_{N_1}/N_1)/((N \cap G_{N_1})/N_1)$. Soit H_{N_1} un groupe $*$ -interprétable dans T_0 et ϕ un plongement définissable de G_{N_1}/N_1 dans H_{N_1} . Comme $(N \cap G_{N_1})/N_1$ est borné, son image I dans H_{N_1} l'est aussi. Donc I est une limite projective de groupes finis, et en particulier $*$ -interprétable dans T_0 . Alors $N_{H_{N_1}}(I)$ est aussi $*$ -interprétable dans T_0 . Donc $H_N = N_{H_{N_1}}(I)/I$ est $*$ -interprétable dans T_0 , et ϕ induit un plongement définissable de G_N/N dans H_N . \square

Soit ϕ le plongement de G_N/N dans un groupe H $*$ -interprétable dans T_0 , et A les paramètres nécessaires pour définir G_N , H et ϕ . On complète A avec un système de représentants pour G/G_N . Ainsi pour tout $g \in G$ il y a $g' \in A$ avec $g'g \in G_N$, et le translaté gN est interdéfinissable sur A avec $g'gN$ et donc par élimination géométrique des imaginaires dans T_0 , interalgébrique avec $\text{acl}(\phi(g'g), A)$.

Soit B un ensemble de paramètres contenant A . Prenons trois éléments génériques g_0, g_1 et g_3 de G indépendants sur B . Il nous faut maintenant trouver D vérifiant la condition sur la 0-indépendance.

Par l'interdéfinissabilité précédente, on peut supposer pour la suite que g_0, g_1 et g_3 sont dans G_N . Afin d'alléger les notations on ajoute B au langage. Posons $g_2 = g_0g_1, g_4 = g_2g_3$ et $g_5 = g_1g_3 = g_0^{-1}g_2g_3 = g_0^{-1}g_4$. Alors le 6-uplet $(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$



forme une configuration de groupe, c'est-à-dire les éléments de chaque paire ainsi que les éléments de chaque triplet non colinéaire sont indépendants, mais sur toute droite chaque point est algébrique sur les deux autres.

Lemme 3.4. *Il existe D , un ensemble dénombrable de génériques de G indépendants sur g_0, g_1, g_3 , tel que pour tout triplet (g_i, g_j, g_k) colinéaire avec $0 \leq i, j, k \leq 5$, l'intersection*

$$\alpha_i = \alpha_i(j, k) = \text{acl}(g_i, D) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D))$$

ne dépend pas du choix de g_j, g_k . De plus

$$\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D) \underset{\alpha_i}{\downarrow}^0 \text{acl}(g_i, D).$$

En particulier, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ forme une 0-configuration de groupe sur $\text{acl}(D)$.

Démonstration. Considérons D_0 un ensemble dénombrable d'éléments génériques de G indépendants sur g_0, g_1, g_3 . Notons que g_0 est générique sur g_1, D_0 et g_3 l'est sur g_0, g_1, D_0 . Si I est une suite de Morley de $\text{tp}(g_0/\text{acl}(g_1, D_0))$ indépendante de g_0, g_3 , ou une suite de Morley de $\text{tp}(g_3/\text{acl}(g_0, g_1, D_0))$ indépendante de g_3 , alors les ensembles $D_0 \cup g_0 I$ et $D_0 \cup g_0^{-1} I$ sont toujours des ensembles d'éléments génériques indépendants sur g_0, g_1, g_3 . En itérant sur les triplets de points non colinéaires du diagramme il est ainsi possible d'étendre D_0 en un ensemble dénombrable D_1 d'éléments génériques indépendants sur g_0, g_1, g_3 , tel que pour tout couple de points (g_i, g_j) sur une même droite, et tout autre point g_ℓ non colinéaire,

- les translats à gauche $g_i D_1$ et $g_i^{-1} D_1$ contiennent chacun une suite de Morley de $\text{tp}(g_i/\text{acl}(g_j, D_0))$, et
- D_1 contient une suite de Morley de $\text{tp}(g_\ell/\text{acl}(g_i, g_j, D_0))$.

En itérant ω fois cette construction on obtient un ensemble dénombrable D d'éléments génériques indépendants sur g_0, g_1, g_3 , tel que pour tout uplet fini \vec{d} de D , tout couple de points (g_i, g_j) sur une même droite et tout autre point g_ℓ non colinéaire,

- $g_i D$ et $g_i^{-1} D$ contiennent tous deux des suites de Morley de $\text{tp}(g_i/\text{acl}(g_j, \vec{d}))$, et
- D contient une suite de Morley de $\text{tp}(g_\ell/\text{acl}(g_i, g_j, \vec{d}))$.

Pour trois points g_i, g_j, g_k sur une même droite et un uplet fini \vec{d} de D , on pose

$$\alpha(i; j, k, \vec{d}) = \text{acl}_0(\text{Cb}_0(\text{acl}(g_j, \vec{d}), \text{acl}(g_k, \vec{d})/\text{acl}(g_i, \vec{d}))),$$

un *-uplet réel 0-interalgébrique avec $\text{Cb}_0(\text{acl}(g_j, \vec{d}), \text{acl}(g_k, \vec{d})/\text{acl}(g_i, \vec{d}))$ par élimination géométrique des imaginaires dans T_0 .

Afin d'alléger les notations, supposons que $g_i g_j = g_k$. (Dans les autres cas on remplace g_i, g_j ou g_k par son inverse, qui lui est T -interalgébrique.) Par construction, $g_j D$ contient une suite de Morley I de $\text{tp}(g_j/\text{acl}(g_i, \vec{d}))$. Alors, la suite

$$(\text{acl}(e, \vec{d}), \text{acl}(g_i e, \vec{d}) : e \in I)$$

est une suite de Morley de $\text{tp}(\text{acl}(g_j, \vec{d}), \text{acl}(g_k, \vec{d})/\text{acl}(g_i, \vec{d}))$. D'après le Lemme 2.1 elle est aussi 0-indépendante sur $\text{acl}(g_i, \vec{d})$, c'est-à-dire est une 0-suite de Morley. Donc

$$\alpha(i; j, k, \vec{d}) \subseteq \text{acl}_0(\text{acl}(e, \vec{d}), \text{acl}(g_i e, \vec{d}) : e \in I).$$

Mais pour tout $e \in I$, on a $e \in g_j D \subseteq \text{acl}(g_j, D)$ et $g_i e \in g_i g_j D = g_k D \subseteq \text{acl}(g_k, D)$.
Donc

$$\alpha(i; j, k, \bar{d}) \subseteq \text{acl}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D)) \cap \text{acl}(g_i, D) = \alpha_i(j, k).$$

De plus, $g_i, g_j, g_k \downarrow_{\bar{d}} D$ pour tout uplet fini \bar{d} dans D , ce qui implique d'après le Lemme 2.1 que

$$\text{acl}(g_j, \bar{d}), \text{acl}(g_k, \bar{d}) \downarrow_{\text{acl}(g_i, \bar{d})}^0 \text{acl}(g_i, D)$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Cb}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D)/\text{acl}(g_i, D)) &= \bigcup_{\bar{d} \in D} \text{Cb}_0(\text{acl}(g_j, \bar{d}), \text{acl}(g_k, \bar{d})/\text{acl}(g_i, \bar{d})) \\ &= \bigcup_{\bar{d} \in D} \text{Cb}_0(\text{acl}(g_j, \bar{d}), \text{acl}(g_k, \bar{d})/\text{acl}(g_i, \bar{d})) \\ &\subseteq \bigcup_{\bar{d} \in D} \text{acl}_0^{\text{eq}}(\alpha(i; j, k, \bar{d})) \subseteq \text{acl}_0^{\text{eq}}(\alpha_i(j, k)). \end{aligned}$$

Comme $\alpha_i(j, k) = \text{acl}(g_i, D) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D))$, on en déduit que

$$\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D) \downarrow_{\alpha_i(j, k)}^0 \text{acl}(g_i, D) \quad (3.1)$$

et $\alpha_i(j, k) = \bigcup_{\bar{d} \in D} \alpha(i; j, k, \bar{d})$.

Pour montrer que $\alpha_i(j, k)$ ne dépend pas de la droite choisie, considérons l'autre droite passant par g_i donnée par les points g_i, g_m, g_n . Soit g_ℓ le sixième point. On supposera

$$g_j g_\ell = g_n \quad \text{et} \quad g_k g_\ell^{-1} = g_m,$$

les autres cas étant analogues. Fixons un uplet fini \bar{d} de D . Par construction, D contient une suite de Morley J de $\text{tp}(g_\ell/\text{acl}(g_i, g_j, \bar{d}))$. La suite

$$(\text{acl}(g_j e, \bar{d}), \text{acl}(g_k e^{-1}, \bar{d}) : e \in J)$$

est alors une suite de Morley de $\text{tp}(\text{acl}(g_n, \bar{d}), \text{acl}(g_m, \bar{d})/\text{acl}(g_i, \bar{d}))$. Par le Lemme 2.1 elle est aussi 0-indépendante sur $\text{acl}(g_i, \bar{d})$, et

$$\alpha(i; m, n, \bar{d}) \subseteq \text{acl}_0(\text{acl}(g_j e, \bar{d}), \text{acl}(g_k e^{-1}, \bar{d}) : e \in J).$$

Puisque $g_j e \in \text{acl}(g_j, D)$ et $g_k e^{-1} \in \text{acl}(g_k, D)$ pour tout $e \in J$, on en déduit que

$$\alpha(i; m, n, \bar{d}) \subseteq \text{acl}(g_i, D) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D)) = \alpha_i(j, k).$$

Donc $\alpha_i(m, n) \subseteq \alpha_i(j, k)$ et par symétrie on a l'égalité.

Montrons maintenant que α_i est 0-algébrique sur α_j, α_k . Par définition α_i est inclus dans $\text{acl}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D))$. L'équation (3.1) nous donne l'indépendance

$$\text{acl}(g_i, D), \text{acl}(g_k, D) \downarrow_{\alpha_j}^0 \text{acl}(g_j, D),$$

ce qui entraîne $\alpha_i \subset \text{acl}_0(\alpha_j, \text{acl}(g_k, D))$. Mais l'équation (3.1) donne aussi l'indépendance

$$\alpha_i, \alpha_j \downarrow_{\alpha_k}^0 \text{acl}(g_k, D)$$

qui implique que $\alpha_i \subset \text{acl}_0(\alpha_j, \alpha_k)$. Enfin, dans la configuration $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ l'indépendance des éléments des paires et des triplets non colinéaires suit des indépendances de la configuration originelle : Comme $(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ est indépendant de D , ça reste une configuration de groupe sur $\text{acl}(D)$. Or, $\alpha_s \in \text{acl}(g_s, D)$ pour $0 \leq s \leq 5$. On obtient donc une 0-configuration de groupe sur $\text{acl}(D)$. \square

Remarque 3.5. Pour chaque ensemble de paramètres $B \supseteq A$ et tous génériques indépendants g_0, g_1 de G sur B , l'ensemble $D \setminus B$ est constitué de génériques indépendants sur B, g_0, g_1 et sa construction ne dépend pas du réduit T_0 . Si T est stable et G est connexe, par unicité du type générique on obtient D en prenant une suite de Morley dénombrable du type générique de G au-dessus de g_0, g_1, g_3, B .

Nous allons maintenant utiliser la 0-configuration de groupe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ sur $\text{acl}(D)$ obtenue afin de vérifier la condition de 0-indépendance. D'après [15] ou [23, Theorem 5.4.5 et Remark 5.4.9] (où c'est fait pour les uplets finis, mais la démonstration se transfère *verbatim* au cas des *-uplets en remplaçant définissable par *-définissable) il existe un groupe H' connexe *-interprétable dans T_0 sur des paramètres $C = \text{acl}(C) \supseteq \text{acl}(D)$ avec

$$C \downarrow_{\text{acl}(D)}^0 \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5,$$

et trois génériques 0-indépendants h_0, h_1 et h_3 de H' avec $h_2 = h_0h_1, h_4 = h_0h_1h_3$ et $h_5 = h_1h_3$, tels que α_j et h_j sont 0-interalgébriques sur C pour chaque j dans $\{0, \dots, 5\}$. Notons que la stabilité de T_0 implique que H' est en fait une limite projective de groupes T_0 -interprétables.

Par le Lemme 2.1 et la stationnarité de $\text{tp}_0(C/\text{acl}(D))$ on peut même supposer que $C \downarrow_D g_0, g_1, g_3$, ce qui implique que h_0, h_1, h_3 sont indépendants sur C au sens de T .

Rappelons que le stabilisateur à droite de $\text{tp}(g_0, h_0/C)$ dans $G \times H'$ est un sous-groupe *-interprétable S . L'ensemble

$$E = \left\{ (g, h) \in G \times H' : \begin{array}{l} \exists (x, y) \models \text{tp}(g_0, h_0/C) [(x, y) \downarrow_C (g, h) \wedge \\ (xg, yh) \models \text{tp}(g_2, h_2/C) \wedge (xg, yh) \downarrow_C (g, h)] \end{array} \right\}$$

est générique dans un translaté à droite *-interprétable sur C de S . Comme E contient (g_1, h_1) et g_1 est générique dans G sur C , la projection de S sur la première coordonnée est un sous-groupe G_S d'indice borné dans G . Par contre la projection sur la deuxième coordonnée n'est pas nécessairement générique : le type $\text{tp}(h_1/C)$ n'est pas forcément générique dans H' bien que $\text{tp}_0(h_1/C)$ le soit au sens de T_0 . Comme h_0 est algébrique sur C, g_0 , le sous-groupe $H_0 = \{h \in H' : (1, h) \in S\}$ est une limite projective (de cardinalité bornée) de sous-groupes finis, donc *-définissable dans T_0 , et le quotient $\text{Im}(S) = N_{H'}(H_0)/H_0$ est *-interprétable dans T_0 . Le noyau $\ker(S) = \{g \in G_S : (g, 1) \in S\}$ est

un sous-groupe distingué de G_S , et S induit un plongement de $G_S/\ker(S)$ dans $\text{Im}(S)$. On conclut ainsi que $\ker(S)$ est nucléaire.

Nous allons maintenant comparer le morphisme induit par S avec le morphisme ϕ déterminé par le sous-groupe nucléaire minimal N . Par minimalité, l'intersection $\ker(S) \cap N$ est d'indice borné dans N et donc pour tout g de G la classe $g \ker(S)$ est dans $\text{bdd}(gN, C)$. Le choix de A assure que pour tout g de G_N , l'image $\phi(g)$ est algébrique sur g, A et donc sur g, D .

En particulier, pour $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, on a

$$\text{acl}_0(\phi(g_i), A) \subseteq \text{acl}(g_i, D) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(g_j, D), \text{acl}(g_k, D)) = \alpha_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{bdd}(g_i N, A) &= \text{bdd}(\phi(g_i), A) \subseteq \text{bdd}(\alpha_i) \\ &\subseteq \text{bdd}(h_i, C) = \text{bdd}(g_i \ker(S), C) \subseteq \text{bdd}(g_i N, C). \end{aligned}$$

On en déduit que $g_i N$ et α_i sont interbornés sur C , et donc sur D puisque

$$g_i N, \alpha_i \downarrow_D C.$$

Comme α_i est un uplet réel, on a $\alpha_i \subset \text{acl}(g_i N, D)$. Donc

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\subseteq \text{acl}(\alpha_2) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(\alpha_0), \text{acl}(\alpha_1)) \\ &\subseteq \text{acl}(g_2 N, D) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(g_0 N, D), \text{acl}(g_1 N, D)) \subseteq \alpha_2, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du théorème. \square

Dans ce théorème le groupe H peut être trivial, par exemple si on considère le réduit à l'égalité. Afin de contrôler le noyau de l'homomorphisme, nous allons introduire des conditions géométriques relatives.

4. Théories relativement monobasées

Le but originel de ce travail était l'étude des groupes définissables dans les amalgames. Dans ces constructions la clôture autosuffisante joue un rôle central (voir la partie 6). Nous supposons donc pour la suite que la théorie T de départ est munie d'un opérateur de clôture $\langle \cdot \rangle$ finitaire et invariant tel que $A \subseteq \langle A \rangle \subseteq \text{acl}(A)$ pour tout ensemble réel A .

Définition 4.1. La théorie T est *monobasée au-dessus de T_0 pour $\langle \cdot \rangle$* si pour tous ensembles réels $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uplet réel \bar{c} , si

$$\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^0 B,$$

alors la base canonique $\text{Cb}(\bar{c}/B)$ est bornée sur A . (Notons que cette base canonique est un hyperimaginaire de T .)

Plus généralement, T est *monobasée au-dessus de* $(T_i : i < n)$ pour $\langle \cdot \rangle$ si pour tout $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uplet \bar{c} , si

$$\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i B \quad \text{pour tout } i < n,$$

alors la base canonique $\text{Cb}(\bar{c}/B)$ est bornée sur A .

Remarque 4.2. Toute théorie est monobasée au-dessus d'elle-même pour l'opérateur acl . Pour le même opérateur de clôture, si une théorie T est monobasée au-dessus de son réduit au langage de l'égalité, alors elle est monobasée au sens classique ; la réciproque est vraie si T élimine géométriquement les hyperimaginaires. Bien sur, si T est stable, la base canonique $\text{Cb}(\bar{b}/B)$ est constituée d'éléments imaginaires de T et elle est bornée sur A si et seulement si elle est algébrique sur A .

Définition 4.3. La théorie T est *1-ample au-dessus de* T_0 pour $\langle \cdot \rangle$ s'il existe des uplets réels \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} tels que :

- $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \downarrow_{\text{acl}(\bar{a})}^0 \langle \text{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$.
- $\bar{c} \not\downarrow_{\bar{a}} \bar{b}$.

Plus généralement, T est *1-ample au-dessus de* $(T_i : i < n)$ pour $\langle \cdot \rangle$ s'il existe des uplets \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} tels que :

- $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \downarrow_{\text{acl}(\bar{a})}^i \langle \text{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$.
- $\bar{c} \not\downarrow_{\bar{a}} \bar{b}$.

Remarque 4.4. Une théorie T est monobasée au-dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle \cdot \rangle$ si et seulement si elle n'est pas 1-ample au-dessus de $(T_i : i < n)$.

Démonstration. On prend $A = \text{acl}(\bar{a})$ et $B = \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$. □

Pour caractériser les groupes définissables dans des théories relativement monobasées, nous imposerons des conditions supplémentaires entre l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ et les clôtures algébriques acl_i :

(†) Si A est algébriquement clos et $b \downarrow_A c$, alors $\langle Abc \rangle \subseteq \bigcap_{i < n} \text{acl}_i(\langle Ab \rangle, \langle Ac \rangle)$.

(‡) Si $\bar{a} \in \bigcup_{i < n} \text{acl}_i(A)$, alors $\langle \text{acl}(\bar{a}), A \rangle \subseteq \bigcap_{i < n} \text{acl}_i(\text{acl}(\bar{a}), (A))$.

Remarque 4.5. Notons que la clôture algébrique d'une théorie ne satisfait pas la condition (†) au-dessus du réduit à l'égalité dès qu'un groupe non trivial est définissable.

Proposition 4.6. *Supposons que $\langle \cdot \rangle$ satisfasse (†). Alors la 1-ampleur relative est conservée par l'adjonction et la suppression de paramètres.*

Démonstration. C'est évident pour la suppression de paramètres. Pour l'adjonction, considérons un ensemble D de paramètres tel que $T(D)$ soit monobasée au-dessus de $(T_i : i < n)$. Soient $A \subseteq B$ algébriquement clos, et un uplet \bar{c} tels que $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i B$ pour tout $i < n$. On peut toujours supposer $B\bar{c} \downarrow_A D$. Soit $A' = \text{acl}(AD)$ et $B' = \text{acl}(BD)$.

Alors $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_B B'$; donc $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_B^i B'$ pour tout $i < n$, d'où $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i B'$ par transitivité. Donc $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_{A'} B'$. Puisque $\langle \cdot \rangle$ satisfait (\dagger) , l'indépendance $\bar{c} \downarrow_A A'$ implique $\langle A'\bar{c} \rangle \subseteq \text{acl}_i(\langle A\bar{c} \rangle, A')$ pour tout $i < n$, et donc $\langle A'\bar{c} \rangle \downarrow_{A'}^i B'$.

Comme $T(D)$ est relativement monobasée, $\text{Cb}(\bar{c}/B')$ est bornée sur A' . Or, $\bar{c} \downarrow_B D$ implique $\text{Cb}(\bar{c}/B') = \text{Cb}(\bar{c}/B) \in \text{bdd}(B)$. Alors

$$\text{Cb}(\bar{c}/B) \in \text{bdd}(B) \cap \text{bdd}(A') = \text{bdd}(A),$$

puisque $B \downarrow_A A'$. Donc T est relativement monobasée. \square

Remarque 4.7. De même que pour le cas classique, on peut toujours se ramener au cas où A et B sont des modèles pour la définition de relativement monobasé sous l'hypothèse (\dagger) .

Démonstration. Si A, B et \bar{c} témoignent que la théorie T n'est pas monobasée au-dessus de T_0 et $D \supseteq A$ est un modèle indépendant de $B\bar{c}$ sur A , alors la preuve de la Proposition 4.6 montre que $D, \text{acl}(BD)$ et \bar{c} le témoignent aussi. Quant à B , considérons $\mathfrak{M} \supseteq B$ un modèle indépendant de \bar{c} sur B . Comme $\langle A\bar{c} \rangle \subseteq \text{acl}(B\bar{c})$, le Lemme 2.1 implique $\mathfrak{M} \downarrow_B^i \langle A\bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$, d'où $\mathfrak{M} \downarrow_A^i \langle A\bar{c} \rangle$ par transitivité. Alors $\text{Cb}(\bar{c}/\mathfrak{M}) = \text{Cb}(\bar{c}/B) \notin \text{bdd}(A)$. \square

Exemple 4.8.

- La théorie ω -stable DCF_0 des corps différentiellement clos de caractéristique 0 est monobasée sur la théorie ACF_0 des corps algébriquement clos pour la clôture algébrique (modèle-théorique) acl_δ , qui satisfait (\dagger) et (\ddagger) [26, Lemme 6.12 et p. 111].
- L'expansion d'une théorie stable T sans la propriété de recouvrement fini par un prédicat unaire générique [12] est simple et monobasée sur T pour la clôture $\text{acl} = \text{acl}_T$ qui satisfait (\dagger) et (\ddagger) . De même pour la modèle-complétion, si elle existe, de l'expansion de T par un automorphisme [12], si l'on prend la clôture acl_σ . En particulier, la théorie $ACFA$ d'un corps de différence existentiellement clos [11] est supersimple, et monobasée sur la théorie ACF d'un corps algébriquement clos (de même caractéristique).

L'hypothèse que la théorie T est relativement monobasée sur ses réduits permet de montrer que le noyau de l'homomorphisme du Théorème 3.1 est fini.

Théorème 4.9. *Soit T une théorie simple avec des réduits $(T_i : i < n)$ stables qui ont l'élimination géométrique des imaginaires. Si T est relativement monobasée au-dessus de ses réduits pour un opérateur de clôture $\langle \cdot \rangle$ satisfaisant (\dagger) et (\ddagger) , alors tout groupe G type-définissable dans T a un sous-groupe type-définissable d'indice borné qui se plonge définissablement modulo un noyau fini dans un produit fini de groupes H_i interprétables dans les T_i .*

Démonstration. Soient G_i les sous-groupes type-définissables de G d'indice borné, H_i les groupes $*$ -interprétables dans T_i et $\phi_i : G_i \rightarrow H_i$ les homomorphismes donnés par le Théorème 3.1 pour tout $i < n$, et soit A un ensemble de paramètres tel que tout soit défini

sur A . Posons $N = \bigcap_{i < n} \ker(\phi_i)$, $H = \prod_{i < n} H_i$ et $\phi = \prod_{i < n} \phi_i : \bigcap_{i < n} G_i \rightarrow H$ avec $\ker(\phi) = N$.

Le Théorème 3.1 et la Remarque 3.5 assurent de plus que si g, g' sont deux génériques indépendants de $\bigcap_{i < n} G_i$, il existe $D \supseteq A$ indépendant de g, g' sur A tel que pour tout $i < n$ on ait

$$\text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D) \downarrow_{\alpha_i}^i \text{acl}(gg', D),$$

où

$$\alpha_i = \text{acl}(gg'N_i, D) \cap \text{acl}_i(\text{acl}(gN_i, D), \text{acl}(g'N_i, D)).$$

Posons $\alpha = (\alpha_i : i < n)$. Puisque $g \downarrow_D g'$ il suit de (†) que

$$\langle \text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D) \rangle \subseteq \bigcap_{i < n} \text{acl}_i(\text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D)).$$

Or, α est contenu dans $\bigcup_{i < n} \text{acl}_i(\text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D))$. La condition (‡) entraîne l'inclusion

$$\langle \text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D), \text{acl}(\alpha) \rangle \subseteq \bigcap_{i < n} \text{acl}_i(\text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D), \text{acl}(\alpha)).$$

Ainsi, comme $\text{acl}(\alpha) \subseteq \text{acl}(gg', D)$, pour tout $i < n$ on a

$$\langle \text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D), \text{acl}(\alpha) \rangle \downarrow_{\text{acl}(\alpha)}^i \text{acl}(gg', D).$$

Cette indépendance donne

$$\text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D) \downarrow_{\text{acl}(\alpha)} \text{acl}(gg', D),$$

puisque T est relativement monobasée. On obtient

$$\begin{aligned} gg' \in \text{acl}(\alpha) &= \text{acl}(\alpha_i : i < n) \subset \text{acl}(D, gg'N_i : i < n) \\ &= \text{acl}(D, \phi_i(gg') : i < n) = \text{acl}(D, \phi(gg')). \end{aligned}$$

On a ainsi vérifié que gg' et $\phi(gg')$ sont interalgébriques sur D .

Par stabilité chaque H_i est une limite projective de groupes T_i -interprétables et donc H est une limite projective de produits de groupes T_i -interprétables. Comme gg' est un uplet fini, il existe une projection π de H sur un produit de groupes T_i -interprétables $\tilde{H} = \prod_{i < n} \tilde{H}_i$ telle que gg' est algébrique sur $(\pi \circ \phi)(gg')$, D . Le morphisme obtenu $\tilde{\phi} = \pi \circ \phi : \bigcap_{i < n} G_i \rightarrow \tilde{H}$ est à noyau fini. \square

Remarque 4.10. Si la composante connexe de G sur D est une intersection de groupes relativement définissables, alors par compacité $\tilde{\phi}$ est défini sur un sous-groupe de G d'indice fini. Ceci est le cas si T est stable ou supersimple.

Le Théorème 4.9 et la Remarque 4.10 appliqués à DCF_0 et $ACFA$ (Exemple 4.8) permettent de retrouver le théorème de Kowalski–Pillay [20] et partiellement celui de Pillay [24] :

Corollaire 4.11. *Tout groupe définissable dans DCF_0 ou ACFA a un sous-groupe d'indice fini qui se plonge définissablement dans un groupe algébrique, modulo un noyau fini.*

5. CM-trivialité relative

Les théories monobasées rentrent dans un cadre plus large, les théories CM-triviales, dont on donne une définition relative qui nous permet d'étudier les groupes définissables à centre près.

Définition 5.1. La théorie T est *CM-triviale au-dessus de T_0 pour $\langle \cdot \rangle$* si pour tous ensembles réels $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uplet réel \bar{c} , si

$$\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^0 B,$$

alors la base canonique $\text{Cb}(\bar{c}/A)$ est bornée sur $\text{Cb}(\bar{c}/B)$. (Notons que ces bases canoniques sont des hyperimaginaires de T .)

Plus généralement, T est *CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle \cdot \rangle$* si pour tout $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uplet \bar{c} , si

$$\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i B \quad \text{pour tout } i < n,$$

alors la base canonique $\text{Cb}(\bar{c}/A)$ est bornée sur $\text{Cb}(\bar{c}/B)$.

Remarque 5.2. Toute théorie est CM-triviale au-dessus d'elle même pour l'opérateur acl. Pour le même opérateur de clôture, si une théorie T est CM-triviale au-dessus de son réduit au langage de l'égalité, alors elle est CM-triviale au sens classique ; la réciproque est vraie si T élimine géométriquement les imaginaires.

Toute théorie relativement monobasée est relativement CM-triviale. Enfin, si T est stable, les bases canoniques sont imaginaires, et la clôture bornée est la clôture algébrique.

Définition 5.3. La théorie T est *2-ample au-dessus de T_0 pour $\langle \cdot \rangle$* s'il existe des uplets réels \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} tels que :

- $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \downarrow_{\text{acl}(\bar{a})}^0 \langle \text{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$.
- $\bar{c} \downarrow_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$.
- $\bar{c} \not\downarrow_{\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b})} \bar{a}$.

Plus généralement, T est *2-ample au-dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle \cdot \rangle$* s'il existe des uplets \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} tels que :

- $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \downarrow_{\text{acl}(\bar{a})}^i \langle \text{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$.
- $\bar{c} \downarrow_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$.
- $\bar{c} \not\downarrow_{\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b})} \bar{a}$.

Proposition 5.4. *Une théorie T est CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$ si et seulement si elle n'est pas 2-ample au-dessus de $(T_i : i < n)$.*

Démonstration. Supposons que T soit 2-ample pour $\langle \cdot \rangle$, propriété témoignée par des uplets \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} . Posons $A = \text{acl}(\bar{a})$ et $B = \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$. Par définition $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i B$ pour tout $i < n$. Puisque $\bar{c} \not\downarrow_{\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b})} \bar{a}$, la base canonique $\text{Cb}(\bar{c}/A)$ n'est pas bornée sur \bar{b} . D'autre part, $\bar{c} \downarrow_{\bar{b}} B$ implique $\text{Cb}(\bar{c}/B) \in \text{bdd}(\bar{b})$, d'où $\text{Cb}(\bar{c}/A)$ n'est pas bornée sur $\text{Cb}(\bar{c}/B)$. Donc T n'est pas CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$.

Réciproquement, supposons que T ne soit pas CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle \cdot \rangle$, propriété témoignée par des ensembles A , B et un uplet \bar{c} . On pose $\bar{a} = \langle \bar{a} \rangle = A$ et $\beta = \text{Cb}(\bar{c}/B)$. Prenons un modèle M tel que $M \downarrow_{\beta} B\bar{c}$ et $\beta \in \text{bdd}(M)$. Considérons un uplet réel \bar{b} dans M qui algébrise β . Par définition de la base canonique, $\bar{c} \downarrow_{\beta} B$ donc $\bar{c} \downarrow_{\beta} MB$. Alors $\bar{c} \downarrow_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$. De plus, $\beta \in \text{bdd}(B)$ implique $\bar{c} \downarrow_B M$, ce qui entraîne $\text{acl}(\bar{a}\bar{b}) \downarrow_B \langle \bar{a}\bar{c} \rangle$ car $\bar{a} \in B$ et $\langle \bar{a}\bar{c} \rangle \subset \text{acl}(\bar{a}\bar{c})$. Alors $\text{acl}(\bar{a}\bar{b}) \downarrow_B^i \langle \bar{a}\bar{c} \rangle$. Par hypothèse $B \downarrow_{\bar{a}}^i \langle \bar{a}\bar{c} \rangle$; donc par transitivité, on conclut $\text{acl}(\bar{a}\bar{b}) \downarrow_A^i \langle A\bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$. Enfin, $\text{Cb}(\bar{c}/A) \notin \text{bdd}(\bar{b})$, car $\bar{b} \downarrow_{\beta} \bar{a}$ et $\text{Cb}(\bar{c}/A) \notin \text{bdd}(\beta)$. Donc, $\bar{c} \not\downarrow_{\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b})} \bar{a}$. \square

Proposition 5.5. *Supposons que $\langle \cdot \rangle$ satisfasse (\dagger) . Alors la CM-trivialité relative est conservée par l'adjonction et la suppression de paramètres.*

Démonstration. La conservation par adjonction de paramètres est évidente. Pour la suppression, supposons que D soit un ensemble de paramètres tel que $T(D)$ soit CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$, et considérons $A \subseteq B$ algébriquement clos, ainsi qu'un uplet \bar{c} , avec $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i B$ pour tout $i < n$. On peut toujours supposer $AB\bar{c} \downarrow D$. Soit $A' = \text{acl}(AD)$ et $B' = \text{acl}(BD)$. Alors $B\bar{c} \downarrow_A D$, et comme dans la preuve de la Proposition 4.6 on obtient $\langle A'\bar{c} \rangle \downarrow_{A'}^i B'$ pour tout $i < n$.

Par hypothèse, $\text{Cb}(\bar{c}/A') \in \text{bdd}(\text{Cb}(\bar{c}/B'), D)$. Or, $\bar{c} \downarrow_A D$, d'où

$$\text{Cb}(\bar{c}/A') = \text{Cb}(\bar{c}/A) \in \text{bdd}(A) ;$$

de même $\bar{c} \downarrow_B D$ donne $\text{Cb}(\bar{c}/B') = \text{Cb}(\bar{c}/B) \in \text{bdd}(B)$. Alors $AB \downarrow D$ implique $\text{Cb}(\bar{c}/A) \downarrow_{\text{Cb}(\bar{c}/B)} D$, et donc $\text{Cb}(\bar{c}/A) \in \text{bdd}(\text{Cb}(\bar{c}/B))$. \square

Remarque 5.6. Comme dans le cas classique [22, Corollary 2.5], sous l'hypothèse (\dagger) on peut toujours se ramener au cas où A et B sont des modèles dans la définition de CM-trivialité relative.

Démonstration. Soit $D \supseteq A$ un modèle indépendant de $B\bar{c}$ sur A , et $B' = \text{acl}(BD)$. Alors comme dans la preuve de la Proposition 4.6, on a $\langle D\bar{c} \rangle \downarrow_D^i B'$ pour tout $i < n$. De plus, $\text{Cb}(\bar{c}/D) = \text{Cb}(\bar{c}/A)$ et $\text{Cb}(\bar{c}/B') = \text{Cb}(\bar{c}/B)$. On peut donc remplacer A par D .

Quant à B , considérons $\mathfrak{M} \supseteq B$ un modèle indépendant de \bar{c} sur B . Alors $\langle A\bar{c} \rangle \downarrow_A^i \mathfrak{M}$ pour $i < n$ comme dans la preuve de la Remarque 4.7, et $\text{Cb}(\bar{c}/\mathfrak{M}) = \text{Cb}(\bar{c}/B)$. On peut donc remplacer B par \mathfrak{M} . \square

Rappelons que les groupes définissables dans une structure CM-triviale de rang de Morley fini sont nilpotents-par-fini car une telle structure n'interprète ni de corps infini, ni

de mauvais groupes [22]. Pour le cas relativement CM-trivial, nous allons montrer qu'un groupe définissable peut être vu modulo un noyau central comme un sous-groupe d'un produit de groupes interprétables dans les réduits. Si T est stable, le centre d'un groupe est relativement définissable par la condition de chaîne sur les centralisateurs. Par contre, pour un groupe G type-définissable dans une théorie simple, son centre ne l'est pas nécessairement. On utilisera alors le centre approximatif [35, Définition 4.4.9]

$$\tilde{Z}(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

On note que d'après [35, Lemma 4.2.6] le centre approximatif est relativement définissable, et que pour G stable et connexe, $\tilde{Z}(G) = Z(G)$. De plus, d'après [35, Proposition 4.4.10], si G^0 est la composante connexe de G sur les paramètres qui servent à définir G , alors $[\tilde{Z}(G), G^0]$ est un sous-groupe fini central de G^0 , modulo lequel $\tilde{Z}(G^0) = \tilde{Z}(G) \cap G^0$ est central dans G^0 .

Théorème 5.7. *Soit T une théorie simple avec des réduits stables $(T_i : i < n)$ qui ont l'élimination géométrique des imaginaires. Si T est relativement CM-triviale au-dessus de ces réduits pour un opérateur de clôture $\langle \cdot \rangle$ satisfaisant (\dagger) et (\ddagger) , alors tout groupe G type-définissable dans T a un sous-groupe type-définissable d'indice borné qui s'envoie définissablement dans un produit fini de groupes interprétables dans les T_i , où le noyau du morphisme est contenu (à indice fini près) dans le centre approximatif $\tilde{Z}(G)$ de G .*

Démonstration. Soient G_i les sous-groupes type-définissables de G d'indice borné, H_i les groupes $*$ -interprétables dans T_i et $\phi_i : G_i \rightarrow H_i$ les homomorphismes donnés par le Théorème 3.1 pour tout $i < n$. On ajoute les paramètres nécessaires au langage, et on remplace par la suite G par $\bigcap_{i < n} G_i$. Notons N_i le noyau de ϕ_i pour chaque i et posons $N = \bigcap_{i < n} N_i$, $H = \prod_{i < n} H_i$ et $\phi = \prod_{i < n} \phi_i : G \rightarrow H$ avec $\ker(\phi) = N$.

Le Théorème 3.1 et la Remarque 3.5 entraînent de plus que pour g, g' deux génériques indépendants de G il existe un ensemble D d'éléments génériques indépendants sur g, g' tel que pour

$$\alpha_i = \text{acl}(gg'N_i, D) \cap \text{acl}_i(\text{acl}(gN_i, D), \text{acl}(g'N_i, D))$$

on ait

$$\text{acl}(g, D), \text{acl}(g', D) \downarrow_{\alpha_i}^i \text{acl}(gg', D)$$

pour tout $i < n$.

Posons $\alpha = (\alpha_i : i < n)$. Comme α est algébrique sur D , gg' , on a

$$\text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g') \downarrow_{\text{acl}(D, \alpha)}^i \text{acl}(D, gg').$$

Puisque $\langle \cdot \rangle$ satisfait (\dagger) et $g \downarrow_D g'$, on a

$$\langle \text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g') \rangle \downarrow_{\text{acl}(D, \alpha)}^i \text{acl}(D, gg').$$

Or, $\alpha \subseteq \bigcup_{j < n} \text{acl}_j(\text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g'))$, et par (\ddagger) ,

$$\langle \text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g'), \text{acl}(D, \alpha) \rangle \subseteq \text{acl}_i(\langle \text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g') \rangle, \text{acl}(D, \alpha)),$$

donc

$$\langle \text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g'), \text{acl}(D, \alpha) \rangle \downarrow_{\text{acl}(D, \alpha)}^i \text{acl}(D, gg').$$

Comme $\phi(gg')$ et α sont interalgébriques sur D d'après la Remarque 3.2 et la définissabilité de ϕ , on obtient l'indépendance

$$\langle \text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g'), \text{acl}(D, \phi(gg')) \rangle \downarrow_{\text{acl}(D, \phi(gg'))}^i \text{acl}(D, gg'). \quad (5.1)$$

Soient $a, b, e \in D$ distincts, et $D' = D \setminus \{e\}$. On pose

$$A = \text{acl}(D', \phi(gg')), \quad B = \text{acl}(D', gg') \quad \text{et} \quad \bar{c} = (g, g', age, e^{-1}g'b).$$

Comme $age \in \text{acl}(D, g)$ et $e^{-1}g'b \in \text{acl}(D, g')$, on obtient

$$\langle g, g', age, e^{-1}g'b, \text{acl}(D', \phi(gg')) \rangle \downarrow_{\text{acl}(D', \phi(gg'), e)}^i \text{acl}(D', gg').$$

Puisque $e \downarrow_{\text{acl}(D', \phi(gg'))} gg'$, par le Lemme 2.1 on a

$$\text{acl}(D', \phi(gg'), e) \downarrow_{\text{acl}(D', \phi(gg'))}^i \text{acl}(D', gg')$$

et donc par transitivité

$$\langle g, g', age, e^{-1}g'b, \text{acl}(D', \phi(gg')) \rangle \downarrow_{\text{acl}(D', \phi(gg'))}^i \text{acl}(D', gg').$$

Autrement dit, pour tout $i < n$,

$$\langle \bar{c}, A \rangle \downarrow_A^i B.$$

Par CM-trivialité relative, $\text{Cb}(\bar{c}/A) \in \text{bdd}(\text{Cb}(\bar{c}/B))$.

Soit Z le centralisateur approximatif de N dans G , c'est-à-dire

$$Z = \tilde{C}_G(N) = \{g \in G : [N : C_N(g)] < \infty\}.$$

(Si T est stable, le centralisateur $C_G(N)$ est relativement définissable et il peut remplacer Z dans la suite.) D'après [35, Lemma 4.2.6] le centralisateur approximatif est un sous-groupe relativement définissable, disons $Z = G \cap X$ pour un ensemble \emptyset -définissable X . Alors

$$(x^{-1}y \in X \wedge x \in G \wedge y \in G) \vee x = y$$

est une relation d'équivalence type-définissable, et le translaté aZ en est la classe de a : il s'agit bien d'un élément imaginaire qui jouera un rôle important dans le lemme suivant qui nous permettra de conclure.

Lemme 5.8. *Si $N \cap \tilde{Z}(G)$ n'est pas d'indice fini dans N , alors $aZ \in \text{acl}^{\text{eq}}(\text{Cb}(\bar{c}/A)) \setminus \text{acl}^{\text{eq}}(\text{Cb}(\bar{c}/B))$.*

Démonstration. Notons d'abord que puisque $\tilde{Z}(G)$ est relativement définissable, l'indice de $N \cap \tilde{Z}(G)$ dans N est fini si et seulement s'il est borné. Supposons que $N \cap \tilde{Z}(G)$ n'est pas d'indice fini dans N . Alors Z n'est pas d'indice fini dans G : sinon, il contiendrait un générique g de G . Par définition, N aurait un générique n indépendant de g avec $[g, n] = 1$. Cela entraînerait que $[G : C_G(n)] < \infty$ et donc n serait dans $\tilde{Z}(G) \cap N$, ce qui impliquerait que l'indice $\tilde{Z}(G) \cap N$ dans N fût fini. En particulier le translaté aZ n'est pas dans $\text{bdd}(\emptyset)$.

Calculons la base canonique $\text{Cb}(\bar{c}/B)$. Puisque g et age sont deux génériques indépendants sur (D', gg') , l'élément $agg'b$ est définissable sur (D', gg') et \bar{c} est interalgébrique sur $(gg', agg'b)$ avec (g, age) , on obtient

$$\bar{c} \downarrow_{gg', agg'b} D'$$

et $B \cap \text{acl}(\bar{c}) = \text{acl}(gg', agg'b)$. En particulier $\text{Cb}(\bar{c}/B)$ est interalgébrique avec $gg', agg'b$. Or, l'indépendance

$$a \downarrow gg', agg'b$$

implique que $aZ \downarrow \text{Cb}(\bar{c}/B)$, et donc aZ n'est pas algébrique sur $\text{Cb}(\bar{c}/B)$.

Montrons maintenant que aZ est algébrique sur $\text{Cb}(\bar{c}/A)$. Par définition

$$\bar{c} \downarrow_{\text{Cb}(\bar{c}/A)} A$$

et donc pour une suite de Morley J de $\text{lstp}(\bar{c}/A)$, on a

$$J \downarrow_{\text{Cb}(\bar{c}/A)} A.$$

Comme aZ est algébrique sur $a \in A$ il suffit de voir que aZ l'est sur J . Pour la suite notons

$$J = (g_i, g'_i, ag_i e_i, e_i^{-1} g'_i b : i \in I)$$

et considérons une autre réalisation a' de $\text{lstp}(a/J)$. Soit b' tel que $(a', b') \models \text{lstp}(a, b/J)$. Alors $ag_i g'_i b = a' g_i g'_i b'$ pour tout $i \in I$ car ce produit est définissable sur J .

Comme $gg' \downarrow_{\phi(gg')} A$, la suite $(g_i g'_i : i \in I)$ est indépendante sur $\phi(gg')$. Si la suite est suffisamment longue, il existe un élément $g_i g'_i$ indépendant de a, b, a', b', gg' sur $\phi(gg')$; cet élément est donc générique dans $gg'N$ sur a, b, a', b', gg' . Alors $g_i g'_i = gg'n$ pour n générique dans N sur gg', a, b, a', b' . Il suit que

$$n^{-1}(gg')^{-1} a'^{-1} agg'n = b' b^{-1}.$$

Prenons $m \models \text{lstp}(n/gg', a, b, a', b')$ indépendant de n . Alors

$$m^{-1}(gg')^{-1} a'^{-1} agg'm = b' b^{-1} = n^{-1}(gg')^{-1} a'^{-1} agg'n$$

et

$$(mn^{-1})^{-1}(gg')^{-1} a'^{-1} agg'(mn^{-1}) = (gg')^{-1} a'^{-1} agg'.$$

Comme mn^{-1} est générique dans N sur gg' , a, b, a', b' , l'élément $(gg')^{-1}a'^{-1}agg'$ commute avec un générique et donc appartient à $\tilde{C}_G(N) = Z$. La normalité de N dans G entraîne celle de Z . Donc $a'^{-1}a$ est dans Z , d'où $aZ = a'Z$ est algébrique sur J . \square

Comme $\text{Cb}(\bar{c}/A) \in \text{bdd}(\text{Cb}(\bar{c}/B))$, le sous-groupe $N \cap \tilde{Z}(G)$ est d'indice fini dans N ; en particulier l'élément $gg'\tilde{Z}(G)$ est algébrique sur $\phi(gg')$. Du fait que $\tilde{Z}(G)$ est relativement définissable dans G , l'imaginaire fini $gg'\tilde{Z}(G)$ est donc algébrique sur une partie finie de $\phi(gg')$. La stabilité des réduits permet comme à la fin de la preuve du Théorème 4.9 de trouver une projection π de H sur un produit $\tilde{H} = \prod_{i < n} \tilde{H}_i$ de groupes T_i -interprétables telle que $gg'\tilde{Z}(G)$ reste algébrique sur $(\pi \circ \phi)(gg')$. Le morphisme $\tilde{\phi} = \pi \circ \phi : G \rightarrow \tilde{H}$ a alors un noyau contenu (à indice fini près) dans $\tilde{Z}(G)$. \square

Remarque 5.9. Si la composante connexe de G est une intersection de groupes relativement définissables, alors par compacité $\tilde{\phi}$ est défini sur un sous-groupe de G d'indice fini.

Corollaire 5.10. *Avec les hypothèses du théorème précédent, tout groupe G simple type-définissable dans T se plonge définissablement dans un groupe interprétable dans l'un des réduits.*

Démonstration. Par le Théorème 5.7 il y a un homomorphisme non trivial $\phi = \prod_{i < n} \phi_i$ de G dans un produit $H = \prod_{i < n} H_i$ de groupes interprétables dans les réduits. Puisque G est simple, il se plonge dans l'un des H_i . \square

Corollaire 5.11. *Avec les hypothèses du théorème précédent, tout corps K type-définissable dans T est définissablement isomorphe à un sous-corps d'un corps interprétable dans l'un des réduits. Si T est de rang SU fini alors K est algébriquement clos et définissablement isomorphe à un corps interprétable dans un des réduits.*

Démonstration. Considérons le groupe algébrique simple $PSL_2(K)$. Par le corollaire précédent, il se plonge définissablement dans un groupe H interprétable dans l'un des réduits T_i . Ce plongement nous permet de supposer que $K^+ \rtimes K^\times$ est un sous-groupe de H , sachant que l'action par translation de K^\times sur K^+ se traduit dans H par l'action par conjugaison. Soient \bar{K}^+ et \bar{K}^\times les plus petits sous-groupes T_i -type-interprétables de H contenant K^+ et K^\times respectivement. Notons que K^\times normalise aussi \bar{K}^+ , d'où $\bar{K}^\times \leq N_H(\bar{K}^+)$. Donc \bar{K}^\times agit par conjugaison sur \bar{K}^+ . Or, d'après [32, Remark 27] ou [33, Theorem 2.1.19] les groupes \bar{K}^+ et \bar{K}^\times satisfont les mêmes propriétés génériques que K^+ et K^\times . Donc pour tout $a \in \bar{K}^+$ générique il y a $b \in \bar{K}^\times$ avec $b \cdot 1_{K^+} = a$. Comme \bar{K}^\times est abélien, tout élément générique $a \in \bar{K}^+$ a le même fixateur $F = C_{\bar{K}^\times}(a)$. Tout élément de \bar{K}^+ étant la somme de deux génériques, F est aussi le fixateur de \bar{K}^+ tout entier, $F = C_{\bar{K}^\times}(\bar{K}^+)$. Comme $F \cap K^\times = \{1\}$ on peut quotienter par F et supposer que \bar{K}^\times ne fixe aucun élément générique de \bar{K}^+ .

On peut identifier génériquement \bar{K}^+ et \bar{K}^\times en associant à $a \in \bar{K}^+$ générique l'unique $b \in \bar{K}^\times$ avec $a = b \cdot 1_{K^+}$. Ainsi on définit génériquement un produit distributif sur \bar{K}^+ , qu'on étend à \bar{K}^+ tout entier : pour $a, b \in \bar{K}^+$ on trouve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \bar{K}^+$

génériques tels que $a = a_1 + a_2$ et $b = b_1 + b_2$, et chaque a_i est indépendant de chaque b_j . On pose alors

$$a \cdot b = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2.$$

On vérifie que la définition ne dépend pas du choix des décompositions : en effet, si b est générique et si a_1, a_2, a'_1 et a'_2 sont génériques sur b tels que $a_1 + a_2 = a'_1 + a'_2$ et a_2 est générique sur a'_1, a'_2 et b , alors la distributivité générique entraîne

$$a_1b = (a'_1 + (a'_2 - a_2))b = a'_1b + (a'_2 - a_2)b = a'_1b + a'_2b - a_2b.$$

Ainsi on obtient une structure de corps T_i -type-interprétable sur \bar{K}^+ qui étend celle de K . Or, tout corps type-interprétable dans une théorie stable est contenu dans un corps interprétable d'après [27, Corollaire 5.20].

Le plongement de K dans \bar{K} nous donne une paire de corps infinis interprétables dans T . Si T est de rang SU fini, l'extension \bar{K} sur K est nécessairement de degré fini. Or, T_i est superstable de rang borné par le rang SU de T . Donc \bar{K} est algébriquement clos [21, 13]. Comme le degré de l'extension est fini, le corps K est réel clos ou algébriquement clos. La simplicité de T interdit le premier cas et donc les deux corps sont égaux. \square

Remarque 5.12. Sans la condition (\ddagger) on peut montrer que l'homomorphisme du théorème 5.7 n'est pas trivial si G est non isogène à un groupe abélien : si N était d'indice borné dans G , la classe $gg'N$ serait dans $\text{bdd}(\emptyset)$, et α_i et $\phi(gg')$ seraient algébriques sur \emptyset . L'indépendance

$$\text{acl}(D, g), \text{acl}(D, g') \downarrow_{\alpha_i}^i \text{acl}(D, gg')$$

donnerait trivialement, en utilisant (\dagger) , l'équation (5.1) de la démonstration du Théorème 5.7 ; la suite de cette preuve n'utilise plus la condition (\ddagger) et montre que N est contenu, à indice fini près, dans $\tilde{Z}(G)$.

Par conséquent les deux corollaires du théorème restent vrais sans l'hypothèse (\ddagger) .

6. Amalgames

Dans cette partie on montre la CM-trivialité relative des corps colorés dans [25, 29, 1, 5, 6, 4] et des fusions de deux théories dans [16, 7, 39, 3]. Ces structures sont obtenues par amalgamation à la Hrushovski–Fraïssé (libre ou collapsée) à l'aide d'une certaine fonction, la *prédimension*, qui induit un nouvel opérateur, la *clôture autosuffisante*. Notre approche consiste à isoler des caractéristiques communes de ces exemples pour montrer de façon uniforme la CM-trivialité relative au-dessus des théories de base par rapport à la clôture autosuffisante. Même si Hrushovski a déjà énoncé une caractérisation des groupes définissables pour la fusion sur l'égalité, le Théorème 5.7 et ses corollaires nous permettent en particulier d'obtenir de nouveaux résultats sur la définissabilité de corps et de mauvais groupes pour les corps colorés et les fusions.

Remarque 6.1. Les constructions *ab initio* dans un langage relationnel peuvent être vues comme des expansions colorées de la théorie de l'égalité, où des n -uplets sont colorés s'ils sont liés par une des relations. Néanmoins dans ce cas la CM-trivialité relative n'est qu'un petit renforcement de la CM-trivialité absolue qui est déjà connue [38, 31]. De toute façon, il n'y a pas de groupes définissables infinis.

Le groupe de Baudisch [2] est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel V muni d'une sorte additionnelle pour le produit extérieur $\bigwedge^2 V$ avec la forme bilinéaire naturelle. Baudisch a montré que ce groupe est CM-trivial et donc que tout groupe définissable est nilpotent-par-fini. Nous conjecturons que ce groupe (collapsé ou non) est relativement CM-trivial au-dessus de l'espace vectoriel V . Ceci permettrait de conclure que la classe de nilpotence de tout groupe G connexe définissable soit au plus 2.

En revanche le corps différentiel rouge [9] sort de notre cadre puisque la clôture autossuffisante n'est pas contenue dans la clôture algébrique.

Nous revenons maintenant à une description succincte des constructions par amalgamation des corps colorés et des fusions, afin de mettre en évidence les caractéristiques qui nous sont utiles pour vérifier la propriété de CM-trivialité relative :

Coloré : On se donne une théorie de base T_0 et un nouveau prédicat P , dont les points sont dits *colorés*, et on considère la classe \mathcal{F} des modèles colorés de T_0^\forall .

Fusion : On considère plusieurs théories T_i avec un réduit commun T_{com} , et \mathcal{F} dénote la classe des modèles de chaque T_i^\forall .

La méthode d'amalgamation consiste à construire une structure avec une géométrie prédéterminée. Pour cela, on introduit une prédimension δ sur les modèles finiment engendrés de \mathcal{F} qui satisfait l'inégalité sous-modulaire

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B).$$

(Par abus de notation on écrit $\delta(A)$ pour la prédimension de la structure engendrée par A .)

La fusion de deux théories T_1 et T_2 de rang de Morley fini et de rang et degré définissables sur l'égalité se sert de la prédimension

$$\delta(A) = n_1 \text{RM}_1(A) + n_2 \text{RM}_2(A) - n|A|,$$

où $n = n_1 \text{RM}(T_1) = n_2 \text{RM}(T_2)$.

La fusion de deux théories fortement minimales sur un \mathbb{F}_p -espace vectoriel infini utilise la prédimension

$$\delta(A) = \text{RM}_1(A) + \text{RM}_2(A) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{F}_p}}(A).$$

Les corps colorés sont des corps algébriquement clos avec un prédicat P pour un sous-ensemble, avec prédimension

$$\delta(k) = 2 \text{degtr}(k) - \dim_P(P(k)).$$

Dans le corps *noir*, le prédicat P dénote un sous-ensemble N et $\dim_P(N) = |N|$. Le corps *rouge* est de caractéristique positive p et P dénote un sous-groupe additif propre R

avec $\dim_P(R) = \dim_{\text{lin}_{\mathbb{F}_p}}(R)$. Enfin, le corps *vert* est de caractéristique 0 et P dénote un sous-groupe multiplicatif divisible sans torsion \ddot{U} (vu comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel) avec $\dim_P(\ddot{U}) = \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(\ddot{U})$.

En travaillant sur une sous-structure A , on peut aussi définir une version relative $\delta(\cdot/A)$ de la prédimension. La sous-modularité implique

$$\delta(\bar{a}/A) = \lim_{A_0 \rightarrow A} \{\delta(\bar{a}/A_0)\} = \inf\{\delta(\bar{a} \cup A_0) - \delta(A_0) : A_0 \subseteq A \text{ finiment engendrée}\}.$$

En particulier, la limite existe et la prédimension relative est également sous-modulaire. (Par le même abus de notation nous écrirons $\delta(\cdot/A)$ quand il s'agit de la prédimension au-dessus de la structure engendrée par A .)

Selon la partie négative de la prédimension on distingue les deux comportements suivants :

Dégénéré : La partie négative de la prédimension correspond à la cardinalité d'un certain prédicat (ou, plus généralement, à la dimension d'une prégéométrie dégénérée). Par exemple, la fusion de deux théories sur l'égalité ou le corps noir.

Modulaire : Il y a un groupe abélien \emptyset -définissable dans le langage commun à toutes les théories qui est soit un \mathbb{F}_p -espace vectoriel (le cas de la fusion de deux théories sur un \mathbb{F}_p -espace vectoriel ou des corps rouges), soit un groupe divisible avec n -torsion finie pour chaque n (le cas des corps verts). Toute structure est munie de cette loi de groupe et les points colorés (s'il en existe) en forment un sous-groupe (divisible si le groupe l'est).

Pour le cas modulaire, on supposera pour simplifier la rédaction que le groupe abélien \emptyset -définissable a même domaine que la structure (pour le corps vert où il s'agit du groupe multiplicatif, cette hypothèse est vérifiée si on met de coté l'élément 0). Grâce à une Morleyisation, on suppose pour la suite que les théories de départ (T_i , T_{com}) éliminent les quanteurs et que le langage est relationnel sauf pour la loi de groupe dans le cas modulaire (c'est-à-dire l'addition dans le corps rouge, la multiplication dans le corps vert, et l'addition vectorielle dans la fusion sur un espace vectoriel). Si ce groupe est divisible avec n -torsion finie pour chaque n , par abus de langage, on entendra par structure engendrée par une partie B , la clôture divisible du groupe engendré par B . Ainsi une structure finiment engendrée correspondra à un groupe divisible de rang fini (au sens groupe-théorique).

Par élimination des quanteurs dans T_i , le i -diagramme d'une structure A détermine son i -type, et

(δ) $\bigcup_i \text{diag}_i(A)$, plus la coloration de A (s'il y en a), détermine $\delta(A)$.

On se restreint à la sous-classe \mathcal{K} des structures de \mathcal{F} telles que toute sous-structure finiment engendrée a une prédimension positive ou nulle.

Pour M dans \mathcal{K} , une sous-structure A est *autosuffisante* dans M , noté $A \leq M$, si $\delta(\bar{a}/A) \geq 0$ pour tout uplet fini $\bar{a} \in M$. La sous-modularité entraîne que l'intersection de deux structures autosuffisantes l'est aussi, et ainsi l'existence pour tout $A \subseteq M$ d'une plus petite structure autosuffisante contenant A . On l'appelle la *clôture autosuffisante* de A et

on la note $\langle A \rangle_M$; si $M \leq N$ alors $\langle A \rangle_M = \langle A \rangle_N$ et nous noterons simplement $\langle A \rangle$. Comme $\langle A \rangle$ est unique, elle est contenue dans $\text{acl}(A)$. Encore par sous-modularité,

$$\langle A \rangle = \bigcup \{ \langle A_0 \rangle : A_0 \subset A \text{ finiment engendrée} \}$$

et

$$\delta(\langle \bar{a} \rangle) = \liminf \{ \delta(\bar{a}_0) : \bar{a}_0 \supseteq \bar{a} \text{ fini} \}.$$

On note que si δ prend uniquement des valeurs entières, la clôture autosuffisante d'un ensemble finiment engendré est lui-même finiment engendré. Ceci est notamment satisfait dans les exemples cités ci-dessus.

Remarque 6.2. Si un uplet fini \bar{a} est tel que $\delta(\bar{a}/A) < 0$ mais $\delta(\bar{a}'/A) \geq 0$ pour tout sous-uplet strict \bar{a}' de \bar{a} , alors $\bar{a} \in \langle A \rangle$.

Démonstration. Supposons que $\bar{a}' = \langle A \rangle \cap \bar{a}$ est une partie propre de \bar{a} . La sous-modularité donne alors $\delta(\bar{a}/\langle A \rangle) \leq \delta(\bar{a}/A \cup \bar{a}') < 0$. \square

À partir d'une sous-classe $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ de structures finiment engendrées avec la propriété d'amalgamation pour les plongements autosuffisants, on construit par la méthode de Fraïssé un amalgame dénombrable \mathfrak{M} universel et fortement homogène pour les sous-structures autosuffisantes. Le modèle générique \mathfrak{M} s'avère être un modèle de $\bigcup_{i < \omega} T_i$; il est stable, superstable si δ ne prend que des valeurs entières et ω -stable si on peut borner les multiplicités des formules [37]. Il est de rang fini dans le cas collapsé (obtenu par le choix d'une sous-classe de \mathcal{K} suffisamment restreinte pour rendre algébriques (certains) éléments de dimension 0).

L'indépendance au sens de T est caractérisée de la manière suivante :

(\star) Pour deux uplets \bar{a}, \bar{b} et un ensemble C algébriquement clos,

$$\bar{a} \downarrow_C \bar{b}$$

si et seulement si

$$\langle \bar{a} \cup C \rangle \downarrow_C^i \langle \bar{b} \cup C \rangle \text{ pour tout } i \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Dégénéré} : \langle \bar{a}\bar{b} \cup C \rangle = \langle \bar{a} \cup C \rangle \cup \langle \bar{b} \cup C \rangle ; \\ \textbf{Modulaire} : \langle \bar{a}\bar{b} \cup C \rangle \text{ est le sous-groupe engendré} \\ \text{par } \langle \bar{a} \cup C \rangle \text{ et } \langle \bar{b} \cup C \rangle, \text{ et ses points colorés (s'il} \\ \text{y en a) sont les produits de ceux de } \langle \bar{a} \cup C \rangle \text{ et de} \\ \langle \bar{b} \cup C \rangle. \end{array} \right.$$

Remarquons que les prédimensions considérées impliquent que

(\star)₁ $\delta(\bar{a}/A) \leq 0$ pour tout $\bar{a} \in \bigcup_i \text{acl}_i(A)$.

Dans le cas coloré, il y a un unique réduit et la partie positive de la prédimension est alors nulle si $\bar{a} \in \text{acl}_0(A)$. Pour les fusions, chacune des parties positives de la prédimension est majorée par la partie négative.

De plus, pour les classes d'amalgamation \mathcal{K}_0 considérées, l'amalgame libre de deux structures B et C de \mathcal{K}_0 au-dessus d'une sous-structure autosuffisante A reste dans \mathcal{K}_0 du moment que la prédimension de B sur A est strictement positive et A est autosuffisante maximale dans B . Ceci implique que

(\star)₂ pour tout uplet fini $\bar{a} \in \text{acl}(A)$ il y a un uplet fini \bar{b} tel que $\bar{a} \subset \bar{b} \in \text{acl}(A)$ et $\delta(\bar{b}/\langle A \rangle) = 0$.

Lemme 6.3. *La propriété (\star) implique (\dagger), et (\star)₁ + (\star)₂ implique (\ddagger) pour la clôture autosuffisante.*

Démonstration. La première implication est évidente dans le cas dégénéré et elle suit dans le cas modulaire du fait que la loi du groupe est définie dans le langage commun.

Pour la seconde implication, on considère un ensemble A autosuffisant et un uplet fini $\bar{c} \in \bigcup_i \text{acl}_i(A)$. Il suffit alors de montrer que la structure engendrée par $A \cup B$ est autosuffisante où $B = \text{acl}(\bar{c})$.

On montre qu'elle est réunion croissante de sous-structures autosuffisantes dont chacune est clôture autosuffisante d'un uplet fini. Soit \bar{a} un uplet fini de A tel $\bar{c} \in \bigcup_i \text{acl}_i(\bar{a})$. Soit \bar{b} un uplet fini de B contenant \bar{c} . La condition (\star)₂ permet de supposer de plus que $\delta(\bar{b}/\langle \bar{c} \rangle) = 0$ et donc que $\delta(\langle \bar{b} \rangle) = \delta(\langle \bar{c} \rangle)$. De plus (\star)₁ implique que $0 \leq \delta(\bar{c}/\langle \bar{a} \rangle) \leq 0$. La structure C engendrée par $\bar{c} \cup \langle \bar{a} \rangle$ est donc autosuffisante. Donc $\langle \bar{c} \rangle \subseteq C \cap \langle \bar{b} \rangle$. Montrons que la structure engendrée par $\langle \bar{a} \rangle \cup \langle \bar{b} \rangle$ est autosuffisante. Comme cette structure est égale à celle engendrée par $C \cup \langle \bar{b} \rangle$, il suffit de montrer que $\delta(\langle \bar{b} \rangle/C) = 0$. Par sous-modularité,

$$\delta(\langle \bar{b} \rangle/C) \leq \delta(\langle \bar{b} \rangle/C \cap \langle \bar{b} \rangle).$$

Comme

$$\delta(C \cap \langle \bar{b} \rangle) \geq \delta(\langle \bar{c} \rangle) = \delta(\langle \bar{b} \rangle),$$

on conclut que $\delta(\langle \bar{b} \rangle/C) = 0$. □

Nous pouvons maintenant montrer la CM-trivialité relative des amalgames considérés.

Théorème 6.4. *Soit \mathfrak{M} l'un des modèles génériques construits dans [16, 25, 29, 1, 5, 6, 7, 4, 39] (de domaine M). Alors sa théorie T est CM-triviale pour l'opérateur de clôture autosuffisante $\langle \cdot \rangle$ au-dessus des théories de base $(T_i : i < n)$ associées.*

Remarque 6.5. Notons que les théories de base dans la fusion [39] n'éliminent pas toujours géométriquement les imaginaires ; en revanche le Lemme 5.4 n'utilise pas cette hypothèse et la conclusion du Lemme 2.1 suit de la caractérisation de l'indépendance (\star).

Démonstration. D'après le Lemme 5.4, il suffit de montrer que T n'est pas 2-ample au-dessus des $(T_i : i < n)$. Soient donc \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} des uplets tels que :

- (i) \bar{a} et \bar{b} sont algébriquement clos ;
- (ii) $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \downarrow_{\bar{a}}^i \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle$ pour tout $i < n$;
- (iii) $\bar{c} \downarrow_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$.

En ajoutant aux paramètres un modèle contenant $\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b})$ et indépendant sur ces paramètres de \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , on peut supposer que $\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b}) = \text{bdd}(\emptyset)$. Il suffira donc de montrer que $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}}$. On supposera, grâce à la Remarque 5.6, que \bar{a} est un modèle.

Posons $D = \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$. Nous allons montrer que $D \downarrow \bar{a}$, ce qui terminera la démonstration car $\bar{c} \in D$. Les conditions (ii) et (iii) impliquent que

$$\text{Cb}_i(D/\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})) \subseteq \bar{a} \cap \bar{b} = \text{acl}(\emptyset) \quad \text{pour tout } i < n,$$

et donc $D \downarrow^i \bar{a}$ pour tout $i < n$. D'après la caractérisation de l'indépendance (\star), il reste à montrer que la sous-structure engendrée par $D \cup \bar{a}$ est autosuffisante, et que ses points colorés sont les produits de ceux de D et de \bar{a} dans le cas modulaire.

La condition (ii) implique que $\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}$, donc

$$\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \bar{b} \subseteq \bar{a} \cap \bar{b} = \text{acl}(\emptyset).$$

Dans le cas dégénéré, le langage est purement relationnel et $D \cup \bar{a}$ est bien une sous-structure. Vérifions dans ce cas qu'elle est autosuffisante. L'indépendance (iii) implique par (\star) que

$$\langle \text{acl}(\bar{c}, \bar{b}), \text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \rangle = \text{acl}(\bar{c}, \bar{b}) \cup \text{acl}(\bar{a}, \bar{b}).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \langle \text{acl}(\bar{c}, \bar{b}), \text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \rangle &= \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap (\text{acl}(\bar{c}, \bar{b}) \cup \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})) \\ &= (\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \text{acl}(\bar{c}, \bar{b})) \cup (\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})) = D \cup \bar{a}. \end{aligned}$$

Comme l'intersection de deux ensembles autosuffisants l'est aussi, $D \cup \bar{a}$ est autosuffisante comme souhaité.

Considérons maintenant le cas modulaire. Notons que la structure $D \cdot \bar{a}$ engendrée par $D \cup \bar{a}$ a pour domaine le produit des groupes D et \bar{a} (y compris s'il y a des points de torsion). Rappelons que dans le cas coloré, seuls les points colorés peuvent avoir une pré-dimension relative négative. Par l'absurde prenons un uplet fini $\bar{\gamma}$ (de points colorés, dans le cas coloré) dans $\langle D, \bar{a} \rangle$ de longueur minimale satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

- (a) $\delta(\bar{\gamma}/D \cup \bar{a}) < 0$, ou
- (b) $\bar{\gamma}$ est un point coloré de $D \cdot \bar{a}$ qui n'appartient pas au groupe engendré par les points colorés de $D \cup \bar{a}$.

La condition (iii) entraîne l'indépendance de $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ et $\text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ au-dessus de \bar{b} . Par la caractérisation de l'indépendance (\star), le produit $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cdot \text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ des groupes $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ et $\text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ est autosuffisant et ses (éventuels) points colorés sont des produits de points colorés de $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cup \text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$. Donc $\langle D, \bar{a} \rangle \subseteq \text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cdot \text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ et $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2$ avec $\bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$, $\bar{\gamma}_2 \in \text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ tel que, dans le cas coloré, $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ sont colorés. Nous allons montrer qu'on peut choisir $\bar{\gamma}_1 \in \bar{a}$ et $\bar{\gamma}_2 \in D$, ce qui contredira l'hypothèse sur $\bar{\gamma}$.

Puisque $D \cup \bar{\gamma} \subseteq \langle D, \bar{a} \rangle \subseteq \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle$, la condition (ii) entraîne pour tout $i < n$ l'indépendance

$$D, \bar{\gamma} \downarrow_{\bar{a}}^i \text{acl}(\bar{a}, \bar{b}). \quad (6.1)$$

Par la caractérisation (\star) , les ensembles $\text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ et $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ sont i -indépendants au-dessus de \bar{b} pour tout $i < n$. Comme $D \cup \bar{\gamma}_2$ est contenu dans $\text{acl}(\bar{c}, \bar{b})$, on obtient, pour tout $i < n$, l'indépendance

$$D, \bar{\gamma}_2 \downarrow_{\bar{b}}^i \text{cl}(\bar{a}, \bar{b}). \quad (6.2)$$

Pour un type p stationnaire sur A et $B \supseteq A$ on notera $p|_B$ l'unique extension non déviante de p sur B . Rappelons que deux types stationnaires p et q (éventuellement sur des domaines différents) sont *parallèles* (ce qu'on note $p \parallel q$) s'ils ont même extension non déviante sur la réunion de leurs domaines. Le parallélisme est une relation d'équivalence.

Pour chaque $i < n$, notons $p_i(X, \bar{x}, \bar{a}) = \text{tp}_i(D, \bar{\gamma}/\bar{a})$. Ces types sont stationnaires puisque \bar{a} est un modèle. Pour $\bar{\gamma}' \in M^{|\bar{\gamma}'|}$ et $\bar{a}' \models \text{tp}(\bar{a})$ on pose

$$\bar{\gamma}' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}') = \{\varphi(X, \bar{\gamma}'^{-1}\bar{x}) : \varphi(X, \bar{x}) \in p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{\gamma}'}\},$$

le type qui correspond au translaté par $\bar{\gamma}'$ (sur les variables \bar{x}) de l'extension non déviante de $p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')$ à $\bar{a}', \bar{\gamma}'$. Autrement dit,

$$\bar{\gamma}' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}') = \text{tp}_i(D_{\bar{a}'}, \bar{\gamma}'\bar{\gamma}_{\bar{a}'}/\bar{a}', \bar{\gamma}')$$

pour $D_{\bar{a}'}, \bar{\gamma}_{\bar{a}'}$ une réalisation de $p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')$ tel que $D_{\bar{a}'}, \bar{\gamma}_{\bar{a}'} \downarrow_{\bar{a}'}^i \bar{\gamma}'$.

Par (6.1) et (6.2) remarquons que pour tout $i < n$, le type $\text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})$ est parallèle au translaté par $\bar{\gamma}_1^{-1}$ de $\text{tp}_i(D, \bar{\gamma}/\bar{a})$. L'idée de la démonstration est de remplacer $\bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ par un uplet dans $\text{acl}(\bar{a})$. Pour cela on introduit la relation E sur les réalisations de $\text{tp}(\bar{a})$ donnée par

$$\bar{a}' E \bar{a}'' \Leftrightarrow \exists \bar{\gamma}' \in M^{|\bar{\gamma}'|} \bigwedge_{i < n} \bar{\gamma}' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}') \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'').$$

Dans le cas coloré, on demande de plus que $\bar{\gamma}'$ soit coloré.

Cette relation est type-définissable en utilisant la définissabilité des i -types. Voyons que c'est une relation d'équivalence dont les classes sont des hyperimaginaires. La réflexivité est évidente. Montrons la transitivité : considérons $\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''' \models \text{tp}(\bar{a})$ avec $\bar{a}' E \bar{a}''$ et $\bar{a}'' E \bar{a}'''$, et choisissons $\bar{\gamma}', \bar{\gamma}''$ (éventuellement colorés) avec

$$\bigwedge_{i < n} \bar{\gamma}' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}') \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'') \quad \text{et} \quad \bigwedge_{i < n} \bar{\gamma}'' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'') \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''').$$

Ceci signifie que pour tout $i < n$,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} &= p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''}, \\ \bar{\gamma}'' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} &= p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'' \bar{\gamma}' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} &= \bar{\gamma}'' p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} \\ &= p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} \end{aligned}$$

et $\bar{a}' E \bar{a}'''$. La symétrie se montre de manière analogue.

Montrons maintenant que la classe de \bar{a} modulo E est bornée sur \bar{b} . On considère pour cela $\bar{a}', \bar{\gamma}' \models \text{tp}(\bar{a}, \bar{\gamma}_1/\bar{b})$ et on vérifie que \bar{a}' est dans la classe d'équivalence de \bar{a} . Fixons $i < n$. Puisque $\bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ et $D, \bar{\gamma} \perp_{\bar{a}}^i \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ d'après (6.1), on a

$$\bar{\gamma}_1^{-1} p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})} = \text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_1^{-1} \bar{\gamma} / \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})) = \text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2 / \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})). \quad (6.3)$$

Par (6.2) ce type est l'unique extension non déviante de $\text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})$ à $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$. Comme $\bar{a}', \bar{\gamma}'$ a même i -type que $\bar{a}, \bar{\gamma}_1$ sur \bar{b} ,

$$\bar{\gamma}'^{-1} p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\text{acl}(\bar{a}', \bar{b})}$$

est également l'unique extension non déviante de $\text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})$ à $\text{acl}(\bar{a}', \bar{b})$ et

$$\bar{\gamma}_1^{-1} p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cup \text{acl}(\bar{a}', \bar{b})} = \bar{\gamma}'^{-1} p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cup \text{acl}(\bar{a}', \bar{b})}$$

est l'unique extension non déviante de $\text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})$ à $\text{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cup \text{acl}(\bar{a}', \bar{b})$. On en conclut que $\bar{a}E\bar{a}'$ et donc que la classe de \bar{a} modulo E est bornée sur \bar{b} .

La classe de \bar{a} modulo E est contenue dans $\text{bdd}(\bar{a}) \cap \text{bdd}(\bar{b}) = \text{bdd}(\emptyset)$. Soit N un modèle ω -saturé tel que $\text{tp}(N/\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ cohérite sur $\text{dcl}(\emptyset)$ (qui est un modèle). Alors on trouve un représentant \bar{a}_0 dans N de la classe $\bar{a}E$. Soit $\bar{\gamma}_0$ témoin de l'équivalence de \bar{a}_0 et \bar{a} . Pour terminer il suffira de montrer que

$$\bar{\gamma}_0 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0) \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_0^{-1} \bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{b}, \bar{a}_0).$$

En effet, comme $\text{tp}(\bar{a}_0/\bar{a}, \bar{b})$ est finiment satisfaisable dans $\text{dcl}(\emptyset)$ et $\bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$, on pourra trouver $\bar{\gamma}'_0 \in \text{acl}(\bar{a}) = \bar{a}$, éventuellement coloré, avec $\bar{\gamma}'_0^{-1} \bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{b}) = \bar{b}$. Enfin

$$\bar{\gamma}'_0^{-1} \bar{\gamma} = \bar{\gamma}'_0^{-1} \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \in \langle D, \bar{a} \rangle \cap \text{acl}(\bar{b}, \bar{c}) \subseteq \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \text{acl}(\bar{b}, \bar{c}) = D,$$

ce qui donnera une contradiction car $\bar{\gamma}$ sera alors le produit d'un élément (éventuellement coloré) de \bar{a} et d'un élément (éventuellement coloré) de D .

Montrons d'abord que $\bar{\gamma}_0 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0)$. Rappelons que $\bar{\gamma}_0$ vérifie, pour tout $i < n$,

$$\bar{\gamma}_0 p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0), \bar{\gamma}_0} = p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0), \bar{\gamma}_0}. \quad (6.4)$$

Fixons une réalisation $D', \bar{\gamma}'$ de $\text{tp}(D, \bar{\gamma}/\bar{a})|_{\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{\gamma}_0}$. Par l'hypothèse et (6.4),

$$D', \bar{\gamma}_0^{-1} \bar{\gamma}' \models p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{\gamma}_0} \quad \text{pour tout } i < n,$$

et ainsi les uplets $D', \bar{\gamma}_0^{-1} \bar{\gamma}', \bar{a}_0$ et $D, \bar{\gamma}, \bar{a}$ ont mêmes i -types et même coloration. En particulier l'uplet $\bar{\gamma}_0^{-1} \bar{\gamma}'$ satisfait la même condition ((a) ou (b)) sur D', \bar{a}_0 que celle satisfaite par $\bar{\gamma}$ sur D, \bar{a} . On en déduit (à l'aide de la Remarque 6.2 pour le cas (a)) que

$$\bar{\gamma}_0^{-1} \bar{\gamma}' \in \text{acl}(D', \bar{a}_0) \quad \text{et donc} \quad \bar{\gamma}_0 \in \text{acl}(D', \bar{a}_0, \bar{\gamma}').$$

L'indépendance $\bar{a}_0, \bar{\gamma}_0 \perp_{\bar{a}} D', \bar{\gamma}'$ implique alors que $\bar{\gamma}_0 \in \text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0)$.

Montrons enfin que $\bar{\gamma}_1^{-1}\bar{\gamma}_0 \in \text{acl}(\bar{b}, \bar{a}_0)$. Comme \bar{a}_0 est indépendant de $\bar{a}, \bar{b}, D, \bar{\gamma}$, il suit par transitivité de l'indépendance et (6.1) que

$$D, \bar{\gamma} \underset{\bar{a}}{\perp} \text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{b}).$$

Cette indépendance, le fait que $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_1$ sont dans $\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{b})$, et les égalités (6.3) et (6.4) permettent de vérifier que

$$\bar{\gamma}_1^{-1}\bar{\gamma}_0 p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{b})} = \bar{\gamma}_1^{-1} p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{b})} = \text{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{b})}.$$

On considère alors une réalisation $D', \bar{\gamma}'$ de $\text{tp}(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})|_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{b})}$. D'après l'égalité précédente, l'uplet $D', \bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}'$ réalise $p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)$ pour tout $i < n$, ce qui entraîne comme dans le paragraphe précédent que

$$\bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}' \in \text{acl}(D', \bar{a}_0).$$

L'indépendance $\bar{a}_0, \bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma}_1 \underset{\bar{b}}{\perp} D', \bar{\gamma}'$ implique alors que $\bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma}_1 \in \text{acl}(\bar{b}, \bar{a}_0)$. \square

Corollaire 6.6. *Dans les corps colorés de rang de Morley fini tout groupe infini simple interprétable est linéaire. Aucun corps rouge n'admet de mauvais groupe interprétable. Si un mauvais groupe était interprétable dans un corps vert, il ne serait constitué que d'éléments semi-simples.*

Démonstration. Par le théorème précédent les corps colorés sont CM-triviaux au-dessus de la théorie des purs corps algébriquement clos (qui élimine les imaginaires). Considérons un groupe G infini simple définissable dans une de ces théories. Par le Théorème 5.7, il se plonge définissablement dans un groupe connexe algébrique H . Par le théorème de Chevalley [30], H est une extension d'une variété abélienne (qui est commutative) par un groupe linéaire. Comme G est simple, il doit se plonger dans la partie linéaire de H . En particulier, tout mauvais groupe interprétable est linéaire. Dans [28] il est montré qu'un tel mauvais groupe ne peut exister qu'en caractéristique nulle et qu'il n'est constitué alors que d'éléments semi-simples (c'est-à-dire *diagonalisables* en tant que matrices). \square

Remarque 6.7. Dans un travail en cours [10], les auteurs montrent que tout groupe simple définissable dans un corps coloré est définissablement isomorphe à un groupe algébrique. On vérifie également que tout groupe connexe définissable dans une fusion fortement minimale de deux théories fortement minimales avec élimination des imaginaires au-dessus de l'égalité est isogène à un produit de groupes définissables dans chacune des théories.

Remerciements. Nous remercions A. Pillay pour ses commentaires qui nous ont permis de démarquer ce travail, et le rapporteur pour sa lecture critique et détaillée.

Recherche soutenue par le réseau européen MRTN-CT-2004-512234 Modnet, le projet ANR-09-BLAN-0047 Modig, ainsi que l'Institut universitaire de France (F. Wagner).

Références

- [1] Baldwin, J. T., Holland, K.: Constructing ω -stable structures: rank 2 fields. *J. Symbolic Logic* **65**, 371–391 (2000) [Zbl 0957.03044](#) [MR 1782127](#)
- [2] Baudisch, A.: A new uncountably categorical group. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348**, 3889–3940 (1996) [Zbl 0863.03019](#) [MR 1351488](#)
- [3] Baudisch, A.: The additive collapse. *J. Math. Logic* **9**, 241–284 (2009) [Zbl 1207.03042](#) [MR 2679441](#)
- [4] Baudisch, A., Hils, M., Martin-Pizarro, A., Wagner, F. O.: Die böse Farbe. *J. Inst. Math. Jussieu* **8**, 415–443 (2009) [Zbl 1179.03041](#) [MR 2516302](#)
- [5] Baudisch, A., Martin-Pizarro, A., Ziegler, M.: On fields and colorings. *Algebra i Logika* **45**, 159–184 (2006); English transl.: *Algebra Logic* **45**, 92–105 (2006) [Zbl 1119.03029](#) [MR 2260329](#)
- [6] Baudisch, A., Martin-Pizarro, A., Ziegler, M.: Red fields. *J. Symbolic Logic* **72**, 207–225 (2007) [Zbl 1127.03032](#) [MR 2298479](#)
- [7] Baudisch, A., Martin-Pizarro, A., Ziegler, M.: Fusion over a vector space. *J. Math. Logic* **6**, 141–162 (2006) [Zbl 1121.03042](#) [MR 2317424](#)
- [8] Ben Yaacov, I., Tomašić, I., Wagner, F. O.: Constructing an almost hyperdefinable group. *J. Math. Logic* **4**, 181–212 (2005) [Zbl 1069.03023](#) [MR 2114967](#)
- [9] Blossier, T., Martin-Pizarro, A.: Sur les collapses de corps différentiels colorés en caractéristique nulle décrits par Poizat à l’aide des amalgames à la Hrushovski. *J. Inst. Math. Jussieu* **8**, 445–464 (2009) [Zbl 1174.03014](#) [MR 2516303](#)
- [10] Blossier, T., Martin-Pizarro, A., Wagner, F. O.: À la recherche du tore perdu. HAL-00758982.
- [11] Chatzidakis, Z., Hrushovski, E.: Model theory of difference fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351**, 2997–3071 (1999) [Zbl 0922.03054](#) [MR 1652269](#)
- [12] Chatzidakis, Z., Pillay, A.: Generic structures and simple theories. *Ann. Pure Appl. Logic* **95**, 71–92 (1998) [Zbl 0929.03043](#) [MR 1650667](#)
- [13] Cherlin, G., Shelah, S.: Superstable fields and groups. *Ann. Math. Logic* **18**, 227–270 (1980) [Zbl 0475.03012](#) [MR 0585519](#)
- [14] Evans, D.: Ample dividing. *J. Symbolic Logic* **68**, 1385–1402 (2003) [Zbl 1067.03045](#) [MR 2017362](#)
- [15] Hrushovski, E.: Contributions to stable model theory. PhD thesis, Univ. of California at Berkeley (1986) [MR 2635050](#)
- [16] Hrushovski, E.: Strongly minimal expansions of algebraically closed fields. *Israel J. Math.* **79**, 129–151 (1992) [Zbl 0773.12005](#) [MR 1248909](#)
- [17] Hrushovski, E.: A new strongly minimal set. *Ann. Pure Appl. Logic* **62**, 147–166 (1993) [Zbl 0804.03020](#) [MR 1226304](#)
- [18] Hrushovski, E.: The Mordell–Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.* **9**, 667–690 (1996) [Zbl 0864.03026](#) [MR 1333294](#)
- [19] Hrushovski, E., Pillay, A.: Weakly normal groups. In: *Logic Colloquium ’85* (Orsay, 1985), *Stud. Logic Found. Math.* 122, North-Holland, 233–244 (1987) [Zbl 0636.03028](#) [MR 0895647](#)
- [20] Kowalski, P., Pillay, A.: A note on groups definable in difference fields. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130**, 205–212 (2002) [Zbl 0983.03033](#) [MR 1855638](#)
- [21] Macintyre, A.: On ω_1 -categorical theories of fields. *Fund. Math.* **71**, 1–25 (1971) [Zbl 0228.02033](#) [MR 0290954](#)

- [22] Pillay, A.: The geometry of forking and groups of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic* **60**, 1251–1259 (1995) [Zbl 0845.03016](#) [MR 1367208](#)
- [23] Pillay, A.: *Geometric Stability Theory*. Oxford Logic Guides 32, Oxford Univ. Press (1996) [Zbl 0871.03023](#) [MR 1429864](#)
- [24] Pillay, A.: Some foundational questions concerning differential algebraic groups. *Pacific J. Math.* **179**, 179–200 (1997) [Zbl 0999.12009](#) [MR 1452531](#)
- [25] Poizat, B.: Le carré de l'égalité. *J. Symbolic Logic* **64**, 1339–1355 (1999) [Zbl 0938.03058](#) [MR 1779766](#)
- [26] Poizat, B.: *Cours de théorie des modèles. Une introduction à la logique mathématique contemporaine*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (1985). English transl.: *A Course in Model Theory. An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. Springer (2000) [Zbl 0583.03001](#) [MR 0817208](#)
- [27] Poizat, B.: *Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (1987). English transl.: *Stable Groups*. Math. Surveys Monogr. 87, Amer. Math. Soc. (2001) [Zbl 0633.03019](#) [MR 0902156](#)
- [28] Poizat, B.: Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner. *J. Symbolic Logic* **66**, 1637–1646 (2001) [Zbl 1005.03039](#) [MR 1877014](#)
- [29] Poizat, B.: L'égalité au cube. *J. Symbolic Logic* **66**, 1647–1676 (2001) [Zbl 1005.03038](#) [MR 1878287](#)
- [30] Rosenlicht, M.: Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.* **78**, 401–443 (1956) [Zbl 0073.37601](#) [MR 0082183](#)
- [31] Verbovskiy, V., Yoneda, I.: CM-triviality and relational structures. *Ann. Pure Appl. Logic* **122**, 175–194 (2003) [Zbl 1030.03027](#) [MR 1992522](#)
- [32] Wagner, F. O.: Subgroups of stable groups. *J. Symbolic Logic* **55**, 151–156 (1990) [Zbl 0709.03029](#) [MR 1043549](#)
- [33] Wagner, F. O.: *Stable Groups*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 240, Cambridge Univ. Press (1997) [Zbl 0897.03037](#) [MR 1473226](#)
- [34] Wagner, F. O.: CM-triviality and stable groups. *J. Symbolic Logic* **63**, 1473–1495 (1998) [Zbl 0932.03043](#) [MR 1665759](#)
- [35] Wagner, F. O.: *Simple Theories*. Math. Appl. 503, Kluwer (2000) [Zbl 0948.03032](#) [MR 1747713](#)
- [36] Wagner, F. O.: Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic* **66**, 703–706 (2001) [Zbl 1026.03022](#) [MR 1833472](#)
- [37] Wagner, F. O.: Fields and fusion: Hrushovski constructions and their definable groups. In: *New Developments of Independence Notions in Model Theory*, RIMS Kôkyûroku 1718, Kyoto Univ., 27–40 (2010)
- [38] Yoneda, I.: CM-triviality and generic structures. *Arch. Math. Logic* **42**, 423–433 (2003) [Zbl 1024.03032](#) [MR 1990733](#)
- [39] Ziegler, M.: Fusion of structures of finite Morley rank. In: *Model Theory with Applications to Algebra and Analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 349, Cambridge Univ. Press, 225–248 (2008) [Zbl 1160.03011](#) [MR 2441382](#)