Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre printemps 2020 - 2021
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

Fiche Espaces euclidiens 1
PRODUIT SCALAIRE-ORTHOGONALITÉ

Notions abordées

- *Norme. Produit scalaire.*
- *Inégalité de Minkowski.*
- *Égalités de polarisation.*
- *Bases orthonormées.*
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
- *Norme euclidienne.*
- *Égalité du parallélogramme.*
- *Projection orthogonale.*

Pour toute la suite, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

PARTIE I : Produit scalaire, norme euclidienne

1 - Rappeler la définition d'une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :

> **Une norme** sur E est une application $\|\cdot\|$ de E vers vérifiant :
>
> —
>
> —
>
> —

2 - Donner des exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 2$ fixé.

3 - Compléter la définition d'un produit scalaire.

> Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est :
>
> — **symétrique**, c'est-à-dire :
>
> — **bilinéaire**, c'est-à-dire :
>
> — **définie positive**, c'est-à-dire :

4 - Rappeler la définition du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 2$ fixé.

5 -

> **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors :
>
> $$\forall (x, y) \in E^2,\ |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

6 - Montrons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela, on fixe x et y dans E et on considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$.

(a) Vérifier que f est une fonction polynomiale de degré au plus 2, qui est toujours positive.

(b) Conclure en considérant son discriminant.

7 - Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

8 - Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 2$ fixé.

9 - Montrer l'inégalité suivante :

> **Inégalité de Minkowski.** Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors :
>
> $$\forall (x, y) \in E^2, \ \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

10 - En déduire que pour tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E, l'application $\| \cdot \|$ de E vers $[0, +\infty[$ définie pour $x \in E$ par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme.

Cette norme issue du produit scalaire est appelé **norme euclidienne**. De plus, on appelle **espace euclidien** un R-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et donc d'une norme euclidienne. Si l'espace n'est pas de dimension finie, on le dit **préhilbertien**.

11 - Soient deux réels $a < b$. Montrer que l'application qui à $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ associe

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

est une norme euclidienne sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$. Cet espace est-il euclidien ?

12 - Soit un entier $n \geq 1$. Montrer que l'application que à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe

$$\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t M M)}$$

est une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet espace est-il euclidien ?

Pour toute la suite, on fixe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

13 - Égalités de polarisation.

(a) Pour tous éléments x, y de E, exprimer $\|x + y\|^2$ et $\|x - y\|^2$ en fonction de $\|x\|$, $\|y\|$ et $\langle x, y \rangle$.

(b) En déduire une expression du produit scalaire en fonction de la norme euclidienne.

14 - Compléter :

> la **distance** entre deux vecteurs x et y est $d(x, y) =$

15 - Égalité du parallélogramme.

(a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(b) En donner une interprétation géométrique.

PARTIE II : Orthogonalité.

Dans toute cette partie, on note E un espace euclidien, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associés.

1 - Soit x et y deux vecteurs de E. Compléter :

— Le vecteur x est unitaire si

— Les vecteurs x et y sont **orthogonaux** si

— Si E est de dimension n, une base orthonormée de E est

2 - Énoncer le théorème de Pythagore et le démontrer.

3 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $e'_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ et on définit par récurrence sur $i \in \{2, \ldots, n\}$,

$$e'_i = \frac{e_i - \sum\limits_{1 \leq k < i} \langle e_i, e'_k \rangle e'_k}{\left\| e_i - \sum\limits_{1 \leq k < i} \langle e_i, e'_k \rangle e'_k \right\|}.$$

(a) Montrer que $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée de E.

(b) En déduire que tout espace euclidien admet une base orthonormée.

(c) Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (0,1,2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormée.

4 - Soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E. Compléter les définitions suivantes :

— Le vecteur x est **orthogonal** à F si

— L'**orthogonal** de F est $F^{\perp} =$

5 - Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

(a) $F^{\perp}$ est également un sous-espace vectoriel ;

(b) $E^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = E$;

(c) La somme $F + F^{\perp}$ est directe ;

(d) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$;

(e) Si G est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset G$ alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

6 - Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base orthonormée de F.

(a) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $x - \sum\limits_{i=0}^{p} \langle x, f_i \rangle f_i \in F^{\perp}$.

(b) En déduire que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

(c) Montrer que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

7 - Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et x un vecteur de E. Exprimer les coordonnées de x dans cette base à l'aide du produit scalaire. Exprimer la norme de x en fonction de ses coordonnées.

8 - Hyperplan.

(a) Rappeler la définition d'un hyperplan de E.

(b) Comment appelle-t-on les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$?

(c) Rappeler la définition d'un **vecteur normal** à un hyperplan.

(d) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et a un vecteur non nul de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$. Donner l'équation de l'hyperplan ayant a pour vecteur normal.

9 - Projection orthogonale. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $E = F \oplus F^{\perp}$, et si x est un vecteur de E, il existe ainsi un unique vecteur de F, noté $p_F(x)$, tel que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$. Ce vecteur $p_F(x)$ s'appelle **projeté orthogonal** de x sur F.

(a) Montrer que p_F est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le noyau et l'image de p_F.

(c) Que vaut p_F^2 ?

(d) Que vaut $p_F + p_{F^{\perp}}$?

(e) Montrer que p_F est 1-lipschitzien.

(f) Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de F, donner une définition de p_F à l'aide de cette base orthonormée.

(g) On rappelle que la distance d'un vecteur x à F est

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Montrer que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et que pour tout $y \in F$, si $y \neq p_F(x)$ alors $d(x, y) > d(x, F)$. En déduire une autre définition du projeté orthogonal.

10 - Symétrie orthogonale. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Rappeler la définition de la symétrie orthogonale par rapport à F, que l'on notera s_F.

(b) Exprimer s_F en fonction de p_F.

(c) Soit a un vecteur non nul de E et H l'hyperplan ayant pour vecteur normal a. Exprimer s_H à l'aide de a.

PARTIE III : Extrait concours commun polytechnique 2014 -TSI

Exercice

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_1[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.
Autrement dit, $\mathbb{R}_1[X]=\left\{ a\,X+b\,,\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$.

On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}_1[X]\times\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_1[X]\times\mathbb{R}_1[X],\quad \varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\,.$$

Par exemple, si $P=X+1$ et $Q=X$, alors $\varphi(X+1,X)=\int_0^1 (t+1)\,t\,dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

I. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour alléger les notations, on notera désormais $(P\,|\,Q)$ le produit scalaire des polynômes P et Q à la place de $\varphi(P,Q)$.

La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|.\|$.

Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, $\|P\|=\sqrt{(P\,|\,P)}$.

II. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ possédant la propriété suivante : $\forall P\in\mathbb{R}_1[X],\quad (P\,|\,P_0)=P(0)$.

On distinguera bien P_0 qui désigne un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ et $P(0)$ qui représente la valeur du polynôme P en 0.

II.A. Soit P_0 un polynôme fixé de $\mathbb{R}_1[X]$.

Montrer que l'égalité $(P\,|\,P_0)=P(0)$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, si et seulement si, elle est vérifiée pour les deux polynômes $P=1$ et $P=X$.

II.B. On pose : $P_0(X)=a_0\,X+b_0$ où a_0 et b_0 désignent deux réels.

II.B.1. Calculer $(1\,|\,P_0)$ et $(X\,|\,P_0)$ à l'aide de a_0 et b_0.

En déduire que $(P\,|\,P_0)=P(0)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$,

si et seulement si : $\begin{cases} \frac{1}{2}a_0+b_0=1 \\ \frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2}b_0=0 \end{cases}$

II.B.2. Conclure qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on explicitera tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad (P \mid P_0) = P(0)$.

III. On désigne par S l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\|P\| = 1$ et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S en utilisant successivement deux méthodes différentes.

III.A. <u>Première méthode.</u>

On pose $P_1 = 1$.

III.A.1. Vérifier que $\|P_1\| = 1$.

III.A.2. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer un polynôme P_2 de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

III.A.3. Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta) P_1 + \sin(\theta) P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.

III.A.4. Si $P = \cos(\theta) P_1 + \sin(\theta) P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda \cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ.

III.A.5. En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

III.B. <u>Deuxième méthode.</u>

III.B.1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

III.B.2. En utilisant le résultat obtenu dans la partie **II.**, montrer que : $\forall P \in S, \quad P(0) \leq \|P_0\|$.

III.B.3. Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.

III.B.4. Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.