Devoir 1
à retourner le 14 novembre

Exercice 1 (Extrait examen de DEA du 16/01/2002). Soit $(\phi \downarrow \psi)$ une abbréviation pour $\neg(\phi \vee \psi)$. Démontrer que toute formule dans un langage L est équivalente à une formule qui n'utilise que $\downarrow$ et $\exists$ comme symboles logiques.

Exercice 2. Un anneau $\mathcal{A} = \langle A, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ est dit inductif si pour toute formule $\phi(x)$ de L_{ann} à paranètres dans A,

$$\mathcal{A} \models (\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x+1))) \rightarrow \forall x \phi(x).$$

(a) Montrer qu'un anneau inductif est commutatif.

(b) Soit $\mathcal{A}$ un anneau tel qu'il existe $n > 0$ tel que $n.1 = 0$. Montrer que $\mathcal{A}$ est inductif si et seulement s'il est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour un entier $m > 0$.

(c) Montrer que le corps $\mathbb{R}$ n'est pas inductif.

(d) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est pas inductif. (On admettra que tout entier positif est somme de quatres carrés.)

(e) Montrer qu'un corps algébriquement clos de caractéristique 0 est inductif. (On admettra que dans un corps algébriquement clos, toute formule est équivalente à une combinaison booléenne d'équations algébriques (voir chapitre 3 - élimination des quanteurs).)

Exercice 3 (Inspiré de l'examen de DEA du 29/01/2003).

Soit $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, < \rangle)$ dans le langage $L = \{<\}$.

(a) Montrer que

$$T \vdash \begin{array}{l} \exists x \forall y(((x < y) \vee (x = y)) \wedge \\ ((x < y) \rightarrow \exists z((z < y) \wedge \forall t((t < y) \rightarrow ((t = z) \vee (t < z))))) \end{array}$$

et

$$T \vdash \forall x \exists y((x < y) \wedge \forall z((x < z) \rightarrow ((y < z) \vee (y = z)))).$$

(b) Trouver une sous-structure de $\langle \mathbb{N}, < \rangle)$ élémentairement équivalente à $\langle \mathbb{N}, < \rangle)$ sans en être une sous-structure élémentaire.

(c) Montrer que l'ensemble $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ordonné par la relation suivante n'est pas un modèle de T : pour $(i, m), (j, n) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}$, $(i, m) < (j, n)$ si et seulement si $i < j$ ou ($i = j$ et $m < n$).

(d) Montrer par un argument de compacité que $\langle \mathbb{N}, < \rangle)$ possède une extension élémentaire $\mathcal{M}$ contenant un élément α plus grand que tous les éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que α est contenu dans une sous-structure de $\mathcal{M}$ isomorphe à $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$.

(e) Pour $\langle X, < \rangle$ un ordre total, dénotons $\mathcal{M}_X$ la structure $\langle \mathbb{N} \cup (X \times \mathbb{Z}), < \rangle$ telle que sur $\mathbb{N}$, $<$ est l'ordre usuel et pour tous $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, m_1), (x_2, m_2) \in X \times Z$, $n < (x_1, m_1)$ et $(x_1, m_1) < (x_2, m_2)$ ssi $x_1 < x_2$ ou ($x_1 = x_2$ et $m_1 < m_2$).

-i- Montrer que si $\mathcal{M}$ est modèle de T alors il existe un ordre total $\langle X, < \rangle$ tel que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_X$.

-ii- Montrer par un argument de compacité que pour tout ordre total $\langle X, < \rangle$ il existe un ordre total dense sans extrémité $\langle Y, < \rangle$ prolongeant X tel que $\mathcal{M}_X \prec \mathcal{M}_Y$.

-iii- Montrer que si $\langle Y_1, < \rangle$ et $\langle Y_2, < \rangle$ sont deux ordres totaux denses sans extrémité alors $\mathcal{M}_{Y_1} \equiv \mathcal{M}_{Y_2}$.

-iv- En déduire que si $\langle X, < \rangle$ est un ordre total alors $\mathcal{M}_X \models T$.

-v- Donner une axiomatisation de T.

Exercices 2.3, 2.6, 2.22 et 2.23 du chapitre 2.