Université Lyon I
DEA de Mathématiques
Théorie des modèles (1)
Épreuve d'examen
Vendredi 23 janvier 2004, 9h - 12h

Les notes du cours sont autorisées. Le sujet comporte trois exercices indépendants sur deux pages recto-verso.

Exercice 1. Soit le langage $L = \{P_i, E_i : i \in \omega\}$ où chaque P_i est un symbole de relation unaire et chaque E_i un symbole de relation binaire.

Soit $\mathcal{C}$ la classe des L-structures $\mathcal{M}$ vérifiant :

- pour tout $i \neq j$, $P_i^{\mathcal{M}} \cap P_j^{\mathcal{M}} = \emptyset$,
- pour tout $i \in \omega$, $E_i^{\mathcal{M}} \subseteq P_i^{\mathcal{M}} \times P_i^{\mathcal{M}}$ et $E_i^{\mathcal{M}}$ défini sur $P_i^{\mathcal{M}}$ une relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ correspond à la classe des modèles d'une théorie T. (On explicitera pour cela une axiomatisation de T sous forme d'une liste d'énoncés dans le langage L.)

(b) Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T.
Montrer que l'ensemble $\{x \in M : \mathcal{M} \models \neg P_i(x) \text{ pour tout } i \in \omega\}$ est infini.

(c) Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.

(d) Soient $\mathcal{M} \models T$ et $A \subseteq M$.

-i- Décrire les 1-types sur A.

-ii- Montrer que pour tout $i \in \omega$, $\mathrm{RM}(P_i) = 2$.
($\mathrm{RM}(P_i)$ désigne le rang de Morley de l'ensemble défini par P_i dans $\mathcal{M}$.)

-iii- Déterminer le rang de Morley et le degré de Morley de $\mathcal{M}$.

-iv- On note X l'ensemble $\{x \in M : \mathcal{M} \models \neg P_i(x) \text{ pour tout } i \in \omega\}$. Soit l'opérateur cl de l'ensemble des parties de X dans lui-même défini pour $A \subseteq X$ par

$$\mathrm{cl}(A) := \{x \in X : x \not\perp A\}.$$

Montrer que (X, cl) est une géométrie triviale.

Exercice 2. Soient L un langage et P un symbole de relation unaire n'appartenant pas à L. Pour $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ deux L-structures telles que $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$, on considère l'enrichissement $\tilde{\mathcal{N}}$ de la structure $\mathcal{N}$ au langage $L \cup \{P\}$ en interprétant P par M (c'est-à-dire tel que $P^{\tilde{\mathcal{N}}} = M$). Par la suite on notera $(\mathcal{N}; \mathcal{M})$ la $L \cup \{P\}$-structure $\tilde{\mathcal{N}}$.
(Les parties (b) et (c) de cet exercice sont indépendantes.)

(a) Montrer par une induction bien détaillée que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ dans le langage L il existe une formule $\phi_P(\bar{x})$ dans le langage $L \cup \{P\}$ telle que pour tout couple de L-structures $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ et pour tout $\bar{m} \in M$,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } (\mathcal{N}; \mathcal{M}) \models \phi_P(\bar{m}).$$

(b) Soient $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{N}_1$ et $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{N}_2$ deux couples de L-structures tels que les deux $L \cup \{P\}$-structures $(\mathcal{N}_1; \mathcal{M}_1)$ et $(\mathcal{N}_2; \mathcal{M}_2)$ sont élémentairement équivalentes.

-i- Montrer que $\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2$ et que $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$.

-ii- Montrer que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{N}_1$ si et seulement si $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{N}_2$.

(c) On suppose ici que L est fini. Soit T une théorie complète fortement minimale dans le langage L. On suppose de plus que T est ω-catégorique et que T est finiment axiomatisable, c'est-à-dire axiomatisée par un unique axiome θ.

-i- Montrer que pour tout $i \in \omega$, il existe un couple de L-structures $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{N}_i$ tel que $\mathcal{N}_i \models T$, $\mathcal{M}_i$ est fini de cardinalité plus grande que i et algébriquement close dans $\mathcal{N}_i$. (Utiliser la caractérisation des théories fortement minimales dénombrables qui sont ω-catégoriques.)

-ii- En déduire qu'il existe un couple de L-structures $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ tel que $\mathcal{N} \models T$, $\mathcal{M} \not\models \theta$, $\mathcal{M}$ est infinie et algébriquement close dans $\mathcal{N}$.

-iii- Montrer que le couple ci-dessus vérifie de plus que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Conclure.

Exercice 3. Soient $L = \{0, +\}$ le langage des groupes abéliens et T la théorie dans le langage L axiomatisée de la manière suivante :

- axiomes des groupes abéliens infinis
- $\forall x\ 4x = 0$,
- $\forall x\ (2x = 0) \rightarrow (\exists y\ x = 2y)$.

(a) Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\omega$ est modèle de T.

(b) Soit $\mathcal{M} \models T$ de cardinalité κ.

-i- Montrer que $2M$ a même cardinalité que M. (On pourra montrer que l'ensemble M est en bijection avec l'ensemble $2M \times 2M$. Rappelons que tout ensemble infini A a même cardinal que $A \times A$.)

-ii- Montrer qu'il existe une famille $(e_i)_{i \in \kappa}$ de M telle que la famille $(2e_i)_{i \in \kappa}$ est une base du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $2M$.

-iii- Montrer que chaque $m \in M \setminus \{0\}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$m = \lambda_{i_1} e_{i_1} + ... + \lambda_{i_n} e_{i_n}$$

tel que $n > 0$, $i_1 < ... < i_n < \kappa$ et $\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_n}$ dans $\{1, 2, 3\}$.

(c) Montrer que T est totalement catégorique.

(d) En déduire que T est la théorie du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\omega$.

(e) Montrer que T élimine les quanteurs.

(f) Décrire les 1-types sur un modèle $\mathcal{M}$ de T et déterminer leur rang de Morley.