

# Chapitre 1

## Structures et théories

### 1.1 Structures, langage associé

#### Définition 1.1.

1. Une **structure**  $\mathcal{M}$  est un ensemble  $M$  non vide (le **domaine** de  $\mathcal{M}$ ) muni :
  - d'une famille  $(c_i^{\mathcal{M}})_{i \in I}$  de constantes, où  $c_i^{\mathcal{M}} \in M$ ,
  - d'une famille  $(f_j^{\mathcal{M}})_{j \in J}$  de fonctions, où pour tout  $j \in J$ ,  $f_j^{\mathcal{M}}$  est une fonction totale de  $M^{n_j}$  dans  $M$  pour un entier  $n_j > 0$ ,
  - d'une famille  $(R_k^{\mathcal{M}})_{k \in K}$  de relations, où pour tout  $k \in K$ ,  $R_k^{\mathcal{M}}$  est un sous-ensemble de  $M^{n_k}$  pour un entier  $n_k > 0$ .

On supposera de plus qu'une structure est toujours munie de l'égalité, c'est-à-dire que la diagonale de  $M^2$  est l'une des relations  $R_k^{\mathcal{M}}$ . Le domaine de  $\mathcal{M}$  sera souvent confondu avec  $\mathcal{M}$ .

2. Le **langage**  $L$  associé à une structure  $\mathcal{M}$  consiste en :
  - un symbole de constante  $c_i$  pour chaque constante  $c_i^{\mathcal{M}}$ ,
  - un symbole de fonction  $f_j$  **d'arité**  $n_j$  pour chaque fonction  $f_j^{\mathcal{M}}$ ,
  - un symbole de relation  $R_k$  **d'arité**  $n_k$  pour chaque relation  $R_k^{\mathcal{M}}$ .
3. Une  **$L$ -structure** est une structure  $\mathcal{M}$  dont le langage associé est  $L$ .

**Notation.** Un langage arbitraire sera noté

$$L = \{(c_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (R_k)_{k \in K}\}.$$

Une  $L$ -structure sera notée

$$\mathcal{M} = \langle M, (c_i^{\mathcal{M}})_{i \in I}, (f_j^{\mathcal{M}})_{j \in J}, (R_k^{\mathcal{M}})_{k \in K} \rangle$$

ou plus simplement s'il n'y a pas d'ambiguïté

$$\mathcal{M} = \langle M, (c_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (R_k)_{k \in K} \rangle.$$

Dans ces notations, l'égalité sera le plus souvent omise.

**Exemple 1.2.**

1.  $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$  et  $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$  sont des structures ayant le même langage associé  $L = \{0, +\}$  qui est constitué d'un symbole de constante 0, d'un symbole + de fonction binaire et d'un symbole de relation = pour l'égalité.
2. Le langage des ordres  $L_{ord} = \{<\}$  ne contient que deux relations binaires = et <. Les structures  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$  et  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  sont des  $L_{ord}$ -structures.
3. Le langage des groupes  $L_{gp} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$  contient une constante 1, une fonction binaire  $\cdot$ , une fonction unaire  $^{-1}$  et l'égalité.
4. Le langage des anneaux  $L_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$  contient deux constantes 0 et 1, trois fonctions binaires +, -,  $\cdot$ , et l'égalité.

## 1.2 Sous-structures, plongements, isomorphismes

Fixons pour toute la suite un langage  $L = \{(c_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (R_k)_{k \in K}\}$ .

**Définition 1.3.** Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $L$ -structures.

1.  $\mathcal{M}$  est une **sous-structure** de  $\mathcal{N}$  (noté  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ ) si  $M \subset N$  et si cette inclusion préserve les constantes, les fonctions et les relations, c'est-à-dire telle que :
  - pour toute constante  $c \in L$ ,  $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ ,
  - pour toute fonction  $n$ -aire  $f \in L$  et pour tout  $\bar{a} \in M^n$ ,  $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{N}}(\bar{a})$ ,
  - pour toute relation  $n$ -aire  $R \in L$  et pour tout  $\bar{a} \in M^n$ ,  $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$  ssi  $\bar{a} \in R^{\mathcal{N}}$ .
2. Un **plongement** de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  est une application  $\sigma$  de  $M$  dans  $N$  qui préserve les constantes, les fonctions et les relations, c'est-à-dire telle que :
  - pour toute constante  $c \in L$ ,  $\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ ,
  - pour toute fonction  $n$ -aire  $f \in L$  et pour tout  $\bar{a} \in M^n$ ,  $\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$ ,
  - pour toute relation  $n$ -aire  $R \in L$  et pour tout  $\bar{a} \in M^n$ ,  $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$  ssi  $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}$ .
 Remarquons d'une part que l'image d'un plongement est une sous-structure et que réciproquement  $\mathcal{M}$  est une sous-structure de  $\mathcal{N}$  ssi  $M \subset N$  et cette inclusion est un plongement de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ .

Notons par ailleurs que comme le langage est toujours supposé égalitaire, un plongement est toujours injectif.

3. Un **isomorphisme** de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  est un plongement surjectif. Un **automorphisme** de  $\mathcal{M}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{M}$  sur lui-même. On dénote  $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$  pour  $\mathcal{M}$  isomorphe à  $\mathcal{N}$ .

**Remarque 1.4.**

1. Soit  $\mathcal{N}$  une  $L$ -structure. On dira aussi qu'une partie  $M$  de  $N$  est une **sous-structure** de  $\mathcal{N}$  si  $M$  contient toutes les constantes et est close par toutes les fonctions. Dans ce cas, on vérifie (exercice) que la structure ("induite sur  $M$ ")

$$\mathcal{M} := \langle M, (c_i^{\mathcal{N}}), (f_j^{\mathcal{N}}|_{M^{n_j}}), (R_k \cap M^{n_k}) \rangle$$

est une sous-structure, au sens précédent, de  $\mathcal{N}$ .

2. Soit  $\mathcal{N}$  une  $L$ -structure et  $A$  une partie de  $N$ . Il existe une plus petite sous-structure de  $\mathcal{N}$  contenant  $A$ , la sous-structure engendrée par  $A$ , qui est la clôture de  $A$  et de l'ensemble des constantes de  $L$  par les fonctions de  $L$ .
3. Les notions de sous-structure et plongement dépendent du langage choisi. Par exemple,  $\mathbb{N}$  est une sous-structure de  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$  et de  $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$  mais pas de  $\langle \mathbb{Z}, 0, +, - \rangle$ .

**Exercice 1.5.** Soit un corps  $K$ .

1. Remarquer que toute sous-structure de la structure  $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$  est un anneau.
2. Ajouter une fonction  $f$  au langage telle que toute sous-structure de  $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f \rangle$  soit un corps.

**Exercice 1.6.** Soit  $I$  un ensemble totalement ordonné et  $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$  une chaîne de  $L$ -structures ( $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_j$ , pour tout  $i < j$ ). Alors la réunion  $M = \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ , est munie canoniquement d'une  $L$ -structure, notée  $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ , qui satisfait pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$ .

**Définition 1.7.** Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $L$ -structures.

1. Un **isomorphisme partiel** de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  est un isomorphisme d'une sous-structure de  $\mathcal{M}$  sur une sous-structure de  $\mathcal{N}$ . (Remarque : tout plongement est un isomorphisme partiel.)
2. On dira qu'une famille non vide  $\mathcal{F}$  d'isomorphismes partiels de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  est un **va-et-vient** entre les structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  si pour tout  $\sigma \in \mathcal{F}$ ,
  - pour tout  $m \in M$ , il existe  $\tau \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma$  tel que  $m \in \text{Dom}(\tau)$  (**VA**),
  - pour tout  $n \in N$ , il existe  $\tau \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma$  tel que  $n \in \text{Im}(\tau)$  (**VIENT**).
3. On dira que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  se correspondent par va-et-vient s'il existe un va-et-vient entre ces structures.

**Exemple 1.8.** Deux ordres totaux denses sans extrémité se correspondent par va-et-vient.

Soient  $\langle X, < \rangle$  et  $\langle Y, < \rangle$  deux ordres totaux denses sans extrémité. Soit  $\mathcal{F}$  la famille des isomorphismes entre des parties finies de  $X$  et  $Y$ . Cette famille est évidemment non vide : pour tout  $x \in X$  et  $y \in Y$ , l'application qui à  $x$  associe  $y$  est un isomorphisme de  $\{x\}$  sur  $\{y\}$ . Soit  $\sigma$  un isomorphisme de  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$  sur  $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset Y$ . On peut supposer que pour tout  $i$ ,  $\sigma(a_i) = b_i$  et que  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Dans ce cas on a aussi  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit  $x \in X \setminus A$ . Alors ou bien  $x < a_1$  et dans ce cas on prolonge  $\sigma$  en envoyant  $x$  sur un  $y < b_1$ , ou bien  $a_i < x < a_{i+1}$  et on prolonge  $\sigma$  en envoyant  $x$  sur un  $y \in Y$  tel que  $b_i < y < b_{i+1}$ , ou bien  $a_n < x$  et on prolonge  $\sigma$  en envoyant  $x$  sur un  $y > b_n$ .

**Exemple 1.9.** Deux corps algébriquement clos  $K_1$  et  $K_2$  de même caractéristique et de degré de transcendance infini se correspondent par va-et-vient.

Soit  $\mathcal{F}$  la famille des isomorphismes entre des sous-corps finiment engendrés respectivement de  $K_1$  et  $K_2$ . Comme  $K_1$  et  $K_2$  ont même caractéristique,  $\mathcal{F}$  est non vide car leurs corps premiers sont isomorphes.

Soit  $\sigma \in \mathcal{F}$  un isomorphisme de  $k_1$  sur  $k_2$ . Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit  $a \in K_1$ .

Ou bien  $a$  est algébrique sur  $k_1$ . Soit  $P \in k_1[X]$  soit polynôme minimal. Alors  $Q = \sigma(P)$  est un polynôme irréductible de  $k_2[X]$ . Comme  $K_2$  est algébriquement clos il existe  $b \in K_2$  qui a  $Q$  pour polynôme minimal sur  $k_2$ . On obtient alors un isomorphisme de  $k_1(a)$  sur  $k_2(b)$  qui prolonge  $\sigma$  en envoyant  $a$  sur  $b$ .

Ou bien  $a$  est transcendant sur  $k_1$ . Comme  $k_2$  est finiment engendré et  $K_2$  est de degré de transcendance infini, il existe  $b \in K_2$  transcendant sur  $k_2$ . Même conclusion que dans le cas précédent.

**Remarque 1.10.** Si deux structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont isomorphes alors il existe un va-et-vient entre ces deux structures, celui réduit à cet isomorphisme.

Réciproquement :

**Proposition 1.11.** *Deux structures dénombrables qui se correspondent par va-et-vient sont isomorphes.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  un va-et-vient entre deux structures dénombrables  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ . On choisit une énumération  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $M$  et une énumération  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $N$ .

On définit alors par récurrence une suite croissante  $(\sigma_i)_{i \in \omega}$  d'isomorphismes partiels dans  $\mathcal{F}$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $j < i$ ,  $m_j \in \text{Dom}(\sigma_i)$  et  $n_j \in \text{Im}(\sigma_i)$ . On choisit pour cela, n'importe quel élément de  $\mathcal{F}$  pour  $\sigma_0$ . Supposons que  $\sigma_i \in \mathcal{F}$  est choisi. Par va-et-vient, il existe  $\tau \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma_i$  tel que  $m_i \in \text{Dom}(\tau)$  et  $n_i \in \text{Im}(\tau)$ . On prend alors pour  $\sigma_{i+1}$ , l'isomorphisme partiel  $\tau$ .

Soit  $\sigma = \cup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i$ . Alors  $\text{Dom}(\sigma) = M$  et  $\text{Im}(\sigma) = N$ . Vérifions que  $\sigma$  est un plongement :

– soit  $c$  une constante de  $L$ . Alors

$$\sigma(c^{\mathcal{M}}) = \sigma_0(c^{\text{Dom}(\sigma_0)}) = c^{\text{Im}(\sigma_0)} = c^{\mathcal{N}}.$$

– soient  $f$  une fonction  $n$ -aire de  $L$ ,  $R$  une relation  $n$ -aire de  $L$  et  $\bar{a} \in M^n$ . Alors il existe un entier  $i$  tel que  $\bar{a} \in (\text{Dom}(\sigma_i))^n$ . On a donc

$$\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = \sigma_i(f^{\text{Dom}(\sigma_i)}(\bar{a})) = f^{\text{Im}(\sigma_i)}(\sigma_i(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$$

$$\text{et } \bar{a} \in R^{\mathcal{M}} \text{ ssi } \bar{a} \in R^{\text{Dom}(\sigma_i)} \text{ ssi } \sigma_i(\bar{a}) \in R^{\text{Im}(\sigma_i)} \text{ ssi } \sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}.$$

□

**Exemple 1.12.** Deux ordres totaux denses sans extrémité et dénombrables sont isomorphes.

## 1.3 Formules

Afin d'étudier des classes de structures et non pas une structure fixée telle que le corps des nombres complexes, on définit en théorie des modèles un langage *du premier ordre* à partir du langage de base vu précédemment. Ainsi on pourra exprimer certaines propriétés et définir par exemple la classe ou la *théorie* des corps algébriquement clos. On pourra aussi parler de certaines parties d'une classe de structures, les *ensembles définissables* qui correspondront en particulier pour les corps algébriquement clos, aux ensembles constructibles.

Nous avons précédemment fixé un langage  $L$  et nous allons de plus utiliser un ensemble infini dénombrable de variables qui sont généralement notées  $x, y, z, t, x_i, \dots$  pour construire par induction les  $L$ -termes et ensuite les  $L$ -formules (du premier ordre) :

### Définition 1.13.

1. On commence par définir l'ensemble des **termes** du langage  $L$  par l'induction suivante :
  - toutes les constantes de  $L$  et toutes les variables sont des  $L$ -termes,
  - si  $f$  est une fonction  $n$ -aire de  $L$  et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes, alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme.
2. On définit ensuite l'ensemble des **formules** de  $L$  par l'induction suivante :
  - **Les formules atomiques** : si  $R$  est une relation  $n$ -aire de  $L$  et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes alors  $R(t_1, \dots, t_n)$  est une formule,
  - **Combinaisons booléennes (négation, conjonction, disjonction)** : si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules alors  $\neg\phi$  (**non**  $\phi$ ),  $(\phi \wedge \psi)$  ( **$\phi$  et  $\psi$** ) et  $(\phi \vee \psi)$  ( **$\phi$  ou  $\psi$** ) sont des formules,
  - **Quantifications universelle et existentielle** : si  $\phi$  est une formule et  $x$  est une variable alors  $\forall x\phi$  (**pour tout**  $x$ ,  $\phi$ ) et  $\exists x\phi$  (**il existe**  $x$ ,  $\phi$ ) sont des formules.
3. Variables liées, variables libres :
  - si  $\phi$  est une formule et  $x$  est une variable alors les occurrences de  $x$  dans les formules  $\forall x\phi$  et  $\exists x\phi$  sont **liées** au quanteur (ou quantificateur)  $\forall$  ou  $\exists$ , exceptées celles qui étaient liées auparavant dans la formule  $\phi$ ,
  - si  $\phi$  est une formule et  $x$  est une variable alors les occurrences de  $x$  qui ne sont liées à aucun quanteurs sont dites **libres**. En particulier toutes les occurrences des variables d'une formule sans quanteur sont libres.
4. Un **énoncé** ou **formule close** est une formule dont toutes les (occurrences de) variables sont liées.

**Remarque.** Une formule est un mot (**fini**) sur l'alphabet  $L \cup \{x, y, z, t, \dots\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\} \cup \{, , (, )\}$ .

**Exemple 1.14.** Les termes de  $L_{ord}$  sont les variables ; les formules atomiques de  $L_{ord}$  sont les égalités et les inégalités. Les formules suivantes sont des énoncés de  $L_{ord}$  qui décriront, une fois interprétés, les ordres totaux :

1.  $\forall x \neg x < x$ ,
2.  $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$ ,
3.  $\forall x \forall y \forall z \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$ .

Nous allons très rapidement passer au sens ("naturel") que l'on donne à ces formules dans une structure. Pour être tout à fait rigoureux dans nos futurs définitions et démonstrations par induction sur la construction des formules, il est nécessaire de vérifier que la lecture des formules est unique. Nous laissons la vérification de ce résultat syntaxique au lecteur :

**Fait 1.15 (Lecture unique).**

1. *Chaque terme est, soit une variable, soit une constante, soit de la forme  $f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes. Cette écriture est **uniquement déterminée**.*
2. *Chaque formule est :*
  - soit atomique et de la forme  $R(t_1, \dots, t_n)$  où  $R$  est une relation d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes,
  - soit de la forme  $\neg\phi$  où  $\phi$  est une formule,
  - soit de la forme  $(\phi_1 \wedge \phi_2)$  ou de la forme  $(\phi_1 \vee \phi_2)$  où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux formules,
  - soit de la forme  $\exists x\phi$  ou de la forme  $\forall x\phi$  où  $\phi$  est une formule et  $x$  est une variable.*Cette écriture est **uniquement déterminée**.*

## 1.4 Satisfaction

Pour définir l'interprétation des termes et la satisfaction des formules dans une structure, on considérera toujours un terme  $t$  avec un choix de variables  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  tel que  $\bar{x}$  contiennent au moins toutes les variables ayant une occurrence dans  $t$  et de même on considérera une formule  $\phi$  avec un uple  $\bar{x}$  de variables tel que toute variable ayant une occurrence libre dans  $\phi$  se trouve dans l'uple  $\bar{x}$ . On utilisera alors les notations  $t(\bar{x})$  et  $\phi(\bar{x})$ .

**Notation.** Pour toute la suite du cours les notations  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  désigneront des uples **finis** de variables et les notations  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{m} \dots$  désigneront des uples **finis** d'éléments.

**Définition 1.16.** Soit  $\mathcal{M}$  une  $L$ -structure.

1. Soit  $t(\bar{x})$  un terme et  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$  un uple d'éléments de  $M$  de même longueur que  $\bar{x}$ . On obtient un terme  $t(\bar{m})$ , à **paramètres**  $\bar{m}$ , en substituant  $m_i$  à toute occurrence de  $x_i$  dans  $t$ . On définit alors l'**interprétation**  $t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) \in M$  du terme  $t(\bar{m})$  par l'induction suivante :
  - l'interprétation d'une constante  $c$  est  $c^{\mathcal{M}}$ ,

- l'interprétation d'un paramètre  $m$  est  $m$ ,
  - l'interprétation de  $f(t_1, \dots, t_n)(\bar{m})$  où  $f$  est une fonction  $n$ -aire et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes est  $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m}))$ .
2. De même pour une formule  $\phi(\bar{x})$ , on obtient une formule  $\phi(\bar{m})$ , à paramètres  $\bar{m}$ , en substituant  $m_i$  à toute occurrence libre de  $x_i$  dans  $\phi$ . On définit alors la **satisfaction** de  $\phi(\bar{m})$  dans  $\mathcal{M}$ , que l'on dénote  $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ , par l'induction suivante :
- $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)(\bar{m})$  ssi  $(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \in R^{\mathcal{M}}$ ,
  - $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{m})$  ssi  $\mathcal{M} \not\models \phi(\bar{m})$ ,
  - $\mathcal{M} \models (\phi_1 \wedge \phi_2)(\bar{m})$  ssi  $\mathcal{M} \models \phi_1(\bar{m})$  et  $\mathcal{M} \models \phi_2(\bar{m})$ ,
  - $\mathcal{M} \models (\phi_1 \vee \phi_2)(\bar{m})$  ssi  $\mathcal{M} \models \phi_1(\bar{m})$  ou  $\mathcal{M} \models \phi_2(\bar{m})$ ,
  - $\mathcal{M} \models \forall x\phi(x, \bar{m})$  ssi pour tout  $a \in M$ ,  $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$ ,
  - $\mathcal{M} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$  ssi il existe  $a \in M$  tel que  $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$ .
3. Si  $\phi(\bar{m})$  est satisfaite dans  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ ), on dit également que  $\phi(\bar{m})$  est **vraie** dans  $\mathcal{M}$ , que  $\mathcal{M}$  **satisfait**  $\phi(\bar{m})$  ou que  $\bar{m}$  satisfait  $\phi(\bar{x})$  dans  $\mathcal{M}$ .
4. Soient  $\phi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  deux formules. On dit que  $\phi(\bar{x})$  **implique**  $\psi(\bar{x})$  si pour toute  $L$ -structure  $\mathcal{M}$  et tout  $\bar{m} \in M$ , si  $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$  alors  $\mathcal{M} \models \psi(\bar{m})$ .  
Les formules  $\phi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  sont **équivalentes** si  $\phi(\bar{x})$  implique  $\psi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  implique  $\phi(\bar{x})$ .

**Exercice 1.17.** Toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen  $\vee$ , ni le quanteur  $\forall$ .

On vérifie facilement que dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs formules, tout choix de parenthèses donne une formule équivalente. On supprimera donc en général les parenthèses superflues.

Par la suite, nous utiliserons les abréviations suivantes :

- $\phi \rightarrow \psi$  pour  $\neg\phi \vee \psi$ ,
- $\phi \leftrightarrow \psi$  pour  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ .

**Exercice 1.18.** Deux formules  $\phi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  sont équivalentes si et seulement toute  $L$ -structure satisfait  $\forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ .

**Exercice 1.19.** Toute formule est équivalente à une formule **prénexe**, c'est-à-dire à une formule de la forme  $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\phi$  où les  $Q_i$  sont des quanteurs et  $\phi$  est une formule sans quanteur.

Maintenant que nous avons défini les formules, nous pouvons parler des structures vérifiant les mêmes énoncés. Dans le paragraphe **Théories** nous parlerons plus précisément de classes de structures vérifiant certains énoncés.

**Définition 1.20.** Deux  $L$ -structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont **élémentairement équivalentes** (noté  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ) si elles satisfont les mêmes énoncés.

**Exemple 1.21.**

1.  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$  car ces deux structures sont isomorphes (voir Cor 1.24).
2.  $\langle \mathbb{Q}, + \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, + \rangle$ . (Cf plus loin, théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion).
3.  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}, + \rangle$  car  $\forall x \exists y x = y + y$  est satisfaite dans  $\mathbb{Q}$  mais pas dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 1.22.** Si  $\mathcal{M}$  est une  $L$ -structure finie et  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$  alors  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$ .

La méthode de va-et-vient sera souvent utilisée pour montrer que deux structures sont élémentairement équivalentes :

**Proposition 1.23.** Si  $\mathcal{F}$  est un va-et-vient entre deux structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  alors pour tout  $\sigma \in \mathcal{F}$ , tout  $\bar{m} \in (\text{Dom}(\sigma))^n$  (ici  $n$  peut-être nul) et toute formule  $\phi(\bar{x})$ ,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

En particulier,  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ .

*Démonstration.* Commençons par remarquer qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques. Soit  $\sigma$  un isomorphisme partiel de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ . Montrons par induction, que pour tout terme  $t(\bar{x})$  et tout  $\bar{m} \in (\text{Dom}(\sigma))^n$ ,  $t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) \in \text{Dom}(\sigma)$  et  $\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$ . Pour les constantes et les variables, c'est évident car  $\text{Dom}(\sigma)$  est une sous-structure de  $\mathcal{M}$  et  $\sigma$  est un isomorphisme de  $\text{Dom}(\sigma)$  sur la sous-structure  $\text{Im}(\sigma)$  de  $\mathcal{N}$ . Si  $t(x)$  est le terme  $f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction  $n$ -aire et  $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})$  sont des termes pour lesquels le résultat est vrai. Alors  $f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \in \text{Dom}(\sigma)$  car  $\text{Dom}(\sigma)$  est une sous-structure de  $\mathcal{M}$ . De plus

$$\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = \sigma(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m}))) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m})), \dots, \sigma(t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})))$$

car  $\sigma$  est un isomorphisme partiel. Par hypothèse d'induction, on obtient

$$\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m})), \dots, t_n^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m})).$$

On en déduit qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques et, par combinaisons booléennes, toutes les formules sans quanteur.

Nous montrons maintenant le résultat par induction sur la construction des formules pour tous les éléments de  $\mathcal{F}$ . Si le résultat est vrai pour deux formules, il est évidemment vrai pour toute combinaison booléenne de ces formules. Il suffit donc de vérifier que si le résultat est vrai pour  $\phi(x, \bar{y})$  il est encore vrai pour  $\exists x \phi(x, \bar{y})$ . Soit  $\sigma \in \mathcal{F}$  et  $\bar{m} \in (\text{Dom}(\sigma))^n$ . Si  $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$  alors il existe  $a \in M$  tel que  $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$ . Par VA, il existe  $\tau \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma$  tel que  $a \in \text{Dom}(\tau)$ . Par hypothèse d'induction,  $\mathcal{N} \models \phi(\tau(a), \tau(\bar{m}))$  donc  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$ . Si  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$ , on fait de même avec le VIENT.  $\square$

**Corollaire 1.24.** Deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.

**Exercice 1.25.** Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémité sont élémentairement équivalents. En particulier  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$ .

**Exercice 1.26.** Donner un exemple de structures  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{M}$  est une sous-structure de  $\mathcal{N}$  mais n'est pas élémentairement équivalente à  $\mathcal{N}$ .



## 1.5 Ensembles définissables

Avec notre langage nous pourrons aussi étudier les parties définies par des formules dans une structure :

**Définition 1.27.** Soit  $\mathcal{M}$  une  $L$ -structure. Une partie  $D$  de  $M^n$  est un **ensemble définissable** dans  $\mathcal{M}$  si il existe une formule  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  et des paramètres  $\bar{b}$  dans  $M$  tels que

$$D = \{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

On dit alors que  $D$  est définissable avec des paramètres dans  $B$  ou est défini par une formule à paramètres dans  $B$  si  $\bar{b} \subset B$ . Si de plus  $D$  est défini par une formule atomique, on dit que  $D$  est un **ensemble définissable atomique**.

On note  $\text{Def}(\mathcal{M})$  la famille des ensembles définissables de  $\mathcal{M}$ .

**Exemple 1.28.** Dans un groupe  $\langle G, 1, \cdot, {}^{-1} \rangle$ , le centralisateur  $C$  de  $G$  est définie par  $\phi(x) := \forall y \ xy = yx$ . Soit  $\psi(x, y) := (xy = yx)$ . Pour tout  $a \in G$ , le centralisateur de  $a$ ,  $C(a)$ , est définie par  $\psi(x, a)$ .

**Exercice 1.29.** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure  $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ . A-t-on besoin de paramètres ?

**Exercice 1.30.** Montrer que l'ordre sur  $\mathbb{R}$  est définissable sans paramètre dans la structure  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ .

**Exercice 1.31.** La famille  $\text{Def}(\mathcal{M})$  est close par

1. combinaisons booléennes finies : si  $A, B \in \text{Def}(\mathcal{M})$ , le complémentaire de  $A$ , l'union et l'intersection de  $A$  et  $B$  sont dans  $\text{Def}(\mathcal{M})$ ,
2. produits cartésiens : si  $A, B \in X$ ,  $A \times B \in \text{Def}(\mathcal{M})$ ,
3. projections : si  $A$  est une partie définissable de  $M^{n+m}$  alors la projection de  $A$  sur  $M^n$  est définissable,
4. spécialisations : si  $A$  est une partie définissable de  $M^{n+m}$  et si  $\bar{b} \in M^m$  alors

$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n : (\bar{a}, \bar{b}) \in A\} \in \text{Def}(\mathcal{M}),$$

5. permutations des coordonnées : si  $A$  est une partie définissable de  $M^n$  et  $\sigma$  une permutation de  $\{1, \dots, n\}$  alors

$$\sigma(A) := \{(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)} : (a_1, \dots, a_n) \in A\} \in \text{Def}(\mathcal{M}).$$

La famille  $\text{Def}(\mathcal{M})$  est en fait la plus petite famille de parties de  $\cup_{n>0} M^n$ , contenant les ensembles définissables atomiques et étant close par combinaisons booléennes finies, produits cartésiens et projections.

**Exemple 1.32.** Soit  $K$  un corps commutatif considéré dans le langage  $L_{ann}$ . La famille des ensembles atomiques de  $K$  est formée des parties définies par des équations polynomiales. Si on clôt par intersections finis, on obtient alors les **fermés de Zariski**. Alors si on clôt par combinaisons booléennes finies, on obtient les **ensembles constructibles**. Ce n'est pas en général clos par projection. Par contre c'est le cas si  $K$  est un corps algébriquement clos (Théorème de Chevalley). Ce résultat correspond, d'un point de vue modèle théorique, à l'élimination des quanteurs dans les corps algébriquement clos (cf suite du cours). Les ensembles définissables d'un corps algébriquement clos sont donc exactement les ensembles constructibles.

**Proposition 1.33.** Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $L$ -structures. Supposons que  $\mathcal{M}$  est fini. Alors  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$  ssi  $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ .

*Démonstration.* Soit  $n$  le cardinal de  $\mathcal{M}$  et  $(a_1, \dots, a_n)$  une énumération de  $M$ . Remarquons qu'il y a un nombre fini de parties de  $M^n$  car  $M$  est fini. Soit  $(D_i)_{i \in I}$  une énumération des parties de  $M^n$  contenant  $\bar{a}$  et définissables dans  $\mathcal{M}$  sans paramètre. Notons pour tout  $i \in I$ , une formule  $\phi_i(\bar{x})$  définissant  $D_i$ . Soit  $\phi(\bar{x})$  la conjonction de cet ensemble fini de formules. Alors  $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ , donc  $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$ . Comme  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$ . Soit donc  $\bar{b} \in N^n$  tel que  $\mathcal{N} \models \phi(\bar{b})$ .

Notons  $\sigma$  l'application de  $M$  dans  $N$  qui à  $a_k$  associe  $b_k$ . Nous allons vérifier que  $\sigma$  est un isomorphisme. Remarquons tout d'abord que  $\sigma$  est bijective. En effet il existe un ensemble définissable  $D_{i_0}$  qui dit que les  $a_k$  sont distincts. Par conséquent les  $b_k$  sont distincts et comme  $N$  a même cardinal que  $M$  (voir exercice),  $N = \{b_1, \dots, b_k\}$ .

Vérifions que  $\sigma$  est un plongement :

1. soit  $c$  une constante de  $L$ . Alors il existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $c^{\mathcal{M}} = a_k$ . Soit  $D_c$  la partie de  $M^n$  définie par la formule  $x_k = c$ . Il existe  $i \in I$  tel que  $D_c = D_i$ . Donc  $\mathcal{M} \models \forall \bar{x} (\phi_i(\bar{x}) \leftrightarrow x_k = c)$ . D'où  $c^{\mathcal{N}} = b_k$ .
2. soient  $f$  une fonction  $r$ -aire et  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_r) \in M^r$ . Soit  $m_0 := f^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ . Pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ , soit  $k_j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $m_j = a_{k_j}$ . On considère alors  $D_{f, \bar{m}}$  la partie de  $M^n$  définie par la formule  $f(x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) = x_{k_0}$ . On en déduit que  $\sigma(m_0) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$ .
3. soient  $R$  une relation  $r$ -aire et  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_r) \in M^r$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $k_j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $m_j = a_{k_j}$ . On considère alors la partie  $D_{R, \bar{m}}$  de  $M^n$  définie par  $R(x_{k_1}, \dots, x_{k_r})$  si  $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ , la partie  $D_{\neg R, \bar{m}}$  de  $M^n$  définie par  $\neg R(x_{k_1}, \dots, x_{k_r})$  sinon. On en déduit que  $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(\bar{m})$  ssi  $\mathcal{N} \models R^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$ .

□

## 1.6 Théories

**Définition 1.34.** Soit  $\Sigma$  un ensemble d'énoncés.

1. Une  $L$ -structure  $\mathcal{M}$  est un **modèle** de  $\Sigma$  (noté  $\mathcal{M} \models \Sigma$ ) si tout énoncé de  $\Sigma$  est satisfait par  $\mathcal{M}$ .

2. On dit que  $\Sigma$  est **consistant** si  $\Sigma$  a un modèle.
3. Un énoncé  $\phi$  est une **conséquence** de  $\Sigma$  (noté  $\Sigma \vdash \phi$ ) si tout modèle de  $\Sigma$  satisfait  $\phi$ .
4. Une **théorie**  $T$  est un ensemble consistant d'énoncés contenant toutes ses conséquences. Si  $T$  correspond à l'ensemble des conséquences de  $\Sigma$ , on dit que  $\Sigma$  est un **ensemble d'axiomes** pour  $T$  ou une **axiomatisation** de  $T$ .
5. Une théorie  $T$  est **complète** si elle est maximale pour l'inclusion, ce qui signifie que pour toute formule  $\phi$ ,  $\phi \in T$  ou  $\neg\phi \in T$ .
6. En général si une théorie  $T$  est axiomatisée par  $\Sigma$ , on confond  $T$  et  $\Sigma$ . En particulier on dira que  $\Sigma$  est complet si pour tout énoncé  $\phi$ ,  $\Sigma \vdash \phi$  ou  $\Sigma \vdash \neg\phi$ .
7. Si  $\mathcal{M}$  est une  $L$ -structure, on note  $\text{Th}(\mathcal{M})$  la théorie constituée de l'ensemble des énoncés vrais dans  $\mathcal{M}$ . Cette théorie est évidemment complète.

**Remarque 1.35.**

1. Deux théories complètes qui ont un modèle commun sont égales.
2. Deux modèles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont élémentairement équivalents ssi  $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$  ssi  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont modèles d'une même théorie complète.
3. Une théorie est complète si ses modèles sont tous élémentairement équivalents.

**Exercice 1.36.** Soit  $T$  une théorie complète.

1. Si  $T$  a un modèle fini  $\mathcal{M}$ , alors tous ses modèles sont isomorphes à  $\mathcal{M}$ .
2. Si  $T$  a un modèle infini, alors tous ses modèles sont infinis. (Nous verrons plus loin que, contrairement au cas fini, une structure infinie ne peut pas être déterminée par sa théorie.)

**Exemple 1.37.**

1. Théorie des ensembles infinis dans le langage réduit à l'égalité :
  - $\exists x_1 x_2 \dots x_n \wedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$ , pour tout  $n > 0$ .

2. Théorie des ordres totaux :

- $\forall x \neg x < x$ ,
- $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$ ,
- $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$ .

Cette théorie n'est pas complète. Par exemple  $\langle \mathbb{N}, < \rangle$  et  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$  sont des modèles de cette théorie qui ne sont pas élémentairement équivalents. Le premier satisfait l'énoncé  $\exists x \forall y \neg (y < x)$  alors que le second non.

3. Théorie des ordres totaux denses sans extrémité :

- théorie des ordres totaux,
- $\forall x \forall y (x < y) \rightarrow (\exists z (x < z < y))$ ,
- $\forall x \exists y \exists z (y < x < z)$ .

Cette théorie est complète. (Voir exo 1.25.)

4. La théorie des corps commutatifs n'est pas complète, elle a des modèles finis et infinis. La théorie des corps commutatifs de caractéristique 0 n'est pas non plus complète. La formule  $\exists x(x^2 = -1)$  est vraie dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ .
5. Théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  fixé :
  - théorie des corps commutatifs,
  - $\underbrace{1 + \dots + 1}_p = 0$  si  $p > 0$ ;  $\underbrace{1 + \dots + 1}_n \neq 0$ , pour tout  $n > 0$ , si  $p = 0$ .
  - $\forall y_0 \dots \forall y_n (y_n \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^n y_n x^i = 0)$ , pour tout  $n > 0$ .
 Cette théorie est complète. (Voir exo 2.18 ou exemple 2.21.)
6. Théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux dans  $L = \{0, +, -\}$  :
  - théorie des groupes abéliens,
  - $\exists x \neq 0$ ,
  - $\forall x \exists y ny = x$ , pour tout  $n > 0$ ,
  - $\forall x(x = 0 \vee nx \neq 0)$ , pour tout  $n > 0$ .
 Cette théorie est complète. (Voir exemple 2.21)

**Exercice 1.38.** Soit  $L$  le langage réduit à une relation binaire  $E$  (et l'égalité).

1. Donner une axiomatisation (dans ce langage) de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.

## 1.7 Extensions élémentaires

**Définition 1.39.**

1. Un plongement  $\sigma$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  est **élémentaire** si pour toute formule  $\phi(\bar{x})$  et tout  $\bar{m} \in M^n$ ,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

2.  $\mathcal{M}$  est une **sous-structure élémentaire de  $\mathcal{N}$**  (notée  $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ ) si  $\mathcal{M}$  est une sous-structure de  $\mathcal{N}$  telle que pour toute formule  $\phi(\bar{x})$  et tout  $\bar{m} \in M^n$ ,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\bar{m}).$$

3. Un isomorphisme partiel  $\sigma$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  est **élémentaire** si pour toute formule  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  et tout  $\bar{m} \in \text{dom}(\sigma)^n$ .

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

**Notation.** Pour  $\mathcal{M}$  une  $L$ -structure et  $A$  un ensemble de paramètres dans  $M$ , on note  $\text{Th}(\mathcal{M}, A)$  l'ensemble des énoncés à paramètres dans  $A$  qui sont vrais dans  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire la théorie de la  $L \cup \{a : a \in A\}$ -structure  $\langle M, L, a : a \in A \rangle$ .

**Exercice 1.40.** Soit  $\mathcal{M}$  une sous-structure de  $\mathcal{N}$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ ,
2.  $\text{Th}(\mathcal{M}, M) = \text{Th}(\mathcal{N}, M)$ ,
3. l'inclusion  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  est un plongement élémentaire.

On appelle  $\text{Th}(\mathcal{M}, M)$  le **diagramme élémentaire** de  $\mathcal{M}$ .

**Remarque 1.41.**

- Un isomorphisme est élémentaire (Rem 1.10 et prop 1.23).
- Si  $\mathcal{M}$  est une sous-structure élémentaire de  $\mathcal{N}$  alors  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ . (De même, si  $\mathcal{M}$  se plonge élémentairement dans  $\mathcal{N}$ , alors  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ .)
- La réciproque est fautive : une sous-structure élémentairement équivalente n'est pas nécessairement élémentaire.  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$  mais  $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle \not\prec \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ .

**Exercice 1.42.** Soient  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$ .

- Si  $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$  alors  $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ .
- Si  $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$  et  $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$  alors  $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ .
- Trouver un exemple tel que  $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$  mais  $\mathcal{M}_2 \not\prec \mathcal{M}_3$ .

**Exercice 1.43.** Soit  $I$  un ensemble totalement ordonné et  $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$  une chaîne élémentaire de  $L$ -structures ( $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ , pour tout  $i < j$ ). Alors pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_i \prec \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ .

Voici un critère utile pour vérifier qu'une sous-structure est élémentaire. Ce critère n'utilise que la satisfaction dans la grande structure :

**Proposition 1.44 (Test de Tarski).** Soit  $\mathcal{M}$  une sous-structure de  $\mathcal{N}$ . Alors  $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$  si et seulement si pour toute formule  $\phi(x, \bar{y})$  et tout  $\bar{m} \in M^n$ , si  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$  alors il existe  $m_0 \in M$  tel que  $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$  et  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ . Alors  $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ . Donc il existe  $m_0 \in M$  tel que  $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$ . Alors  $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$ .

Réciproquement si  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$  satisfont le critère de Tarski. On montre par induction sur les formules que pour toute formule  $\phi(\bar{x})$  et tout  $\bar{m} \in M^n$ ,  $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$  ssi  $\mathcal{N} \models \phi(\bar{m})$ . Le résultat est évidemment vérifié pour les formules atomiques car  $\mathcal{M}$  est une sous-structure de  $\mathcal{N}$ . Si le résultat est vrai pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , il est facile de voir qu'il est encore vrai pour les combinaisons booléennes de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Il suffit donc de montrer que si le résultat est vrai pour  $\phi(x, \bar{y})$  il est encore vrai pour  $\exists x \phi(x, \bar{y})$ . Soit  $\bar{m} \in M^n$ . Si  $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$  alors il existe  $m_0 \in M$  tel que  $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$ . Par hypothèse de récurrence, alors  $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$  et donc  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ . Si  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ . Alors par le critère de Tarski, il existe  $m_0 \in M$  tel que  $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$ . Par hypothèse de récurrence,  $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$  et donc  $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ .  $\square$

**Corollaire 1.45 (Théorème de Löwenheim-Skolem Descendant).** *Soient  $\mathcal{N}$  une  $L$ -structure infinie,  $A$  un ensemble de paramètres dans  $N$ , et  $\kappa$  un cardinal infini tel que  $\max(|A|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathcal{N}|$ . Alors il y a une sous-structure élémentaire  $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$  contenant  $A$  et de cardinal  $\kappa$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $|A| = \kappa$ . On construit par récurrence une chaîne  $(\mathcal{M}_i)_{i \in \omega}$  de sous-structures de  $\mathcal{N}$  telle que  $\mathcal{M}_0$  contient  $A$ , telle que pour tout  $i \in \omega$ ,  $|\mathcal{M}_i| = \kappa$  et telle que pour toute formule  $\phi(x, \bar{y})$  et  $\bar{m}_i \in M_i^n$ , si  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m}_i)$  alors il existe  $m_{i+1} \in M_{i+1}$  tel que  $\mathcal{N} \models \phi(m_{i+1}, \bar{m}_i)$ .

Soit  $\mathcal{M}_0$  la sous-structure de  $\mathcal{N}$  engendrée par  $A$ . Cette sous-structure est de cardinal  $\kappa$  car  $|L| \leq \kappa = |A|$ . Si  $\mathcal{M}_i$  est construit, alors pour toute formule  $\phi(x, \bar{y})$  (il y en a  $\max(|L|, \aleph_0)$ ) et tout paramètre  $\bar{m} \in M_i^n$  tel que  $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$  (il y en a au plus  $\kappa$ ), on choisit  $n_{\phi, \bar{m}} \in N$  tel que  $\mathcal{N} \models \phi(n_{\phi, \bar{m}}, \bar{m})$ . On définit alors  $\mathcal{M}_{i+1}$  comme la sous-structure engendrée par  $M_i$  et les  $n_{\phi, \bar{m}}$ . Cette sous-structure est évidemment de cardinal  $\kappa$  et vérifie l'hypothèse de récurrence.

Soit  $\mathcal{M} := \cup_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$ . Alors  $\mathcal{M}$  est une sous-structure de  $\mathcal{N}$  de cardinal  $\kappa$  qui de plus vérifie le test de Tarski. C'est donc une sous-structure élémentaire de  $\mathcal{N}$ .  $\square$

Revenons aux ensembles définissables pour terminer ce chapitre :

**Définition 1.46.** Si  $\mathcal{M}$  est une sous-structure élémentaire de  $\mathcal{N}$  et  $D \subset M^n$  est un ensemble définissable dans  $\mathcal{M}$ , alors  $D$  a une extension canonique en un ensemble  $D' \subset N^n$  définissable dans  $\mathcal{N}$ , tel que  $D' \cap M^n = D$  : si  $D$  est défini par une formule  $\phi(\bar{x}, \bar{b})$  ( $\bar{b} \subset M$ ) alors  $D' := \{\bar{a} \in N^n : \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$ . En pratique on confondra  $D'$  avec  $D$ .

**Exercice 1.47.** Vérifier que  $D'$  ne dépend pas du choix de  $\phi$  pour  $D$ .

**Exercice 1.48.** Soient  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ . Le test de Tarski est équivalent à pour toute partie non vide définissable  $D \subset N$  à paramètres dans  $M$ ,  $D \cap M \neq \emptyset$ .