

Chapitre 5

Structures fortement minimales

Définition 5.1. Soit D un ensemble infini définissable dans une structure \mathcal{M} .

- D est dit **minimal** si toute partie de D définissable dans \mathcal{M} est finie ou cofinie dans D . (C'est-à-dire pour tout $X \subset D$, X définissable dans \mathcal{M} , X est fini ou $D \setminus X$ est fini.)
- D est dit **fortement minimal** s'il est minimal dans toute extension élémentaire de \mathcal{M} .
- Une structure \mathcal{M} est **minimale** (respectivement **fortement minimale**) si le domaine M en tant qu'ensemble définissable dans \mathcal{M} l'est.

Exemple 5.2. 1. Tout ensemble infini sans structure est fortement minimal.

2. Tout K -espace vectoriel infini dans le langage $L_K = \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ est fortement minimal.
3. Tout corps algébriquement clos dans le langage des anneaux est fortement minimal.

Exemple 5.3. L'exemple 4.12 est minimal mais n'est pas fortement minimal.

Exercice 5.4. Soit D un ensemble définissable dans \mathcal{M} . Alors D est fortement minimal si et seulement si $\text{RM}(D) = 1$ et $\text{dM}(D) = 1$. Si \mathcal{M} est ω -saturée et D est minimal alors D est fortement minimal.

Les structures fortement minimales sont donc les “plus petites” structures infinies totalement transcendentes. Nous allons voir en particulier dans ce chapitre que dans une structure fortement minimale le rang de Morley sur les uples correspond à la dimension pour la pré-géométrie associée à cette structure.

5.1 Pré-géométries

Définition 5.5. – Un ensemble X muni d'un opérateur (de clôture) $\text{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est une **pré-géométrie** si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. Si $A \subset X$ alors $A \subset \text{cl}(A)$ et $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$.

2. Si $A \subset B \subset X$ alors $\text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$.
 3. Si $A \subset X$ et $a \in \text{cl}(A)$ alors il existe une partie finie $A_0 \subset A$ telle que $a \in \text{cl}(A_0)$.
 4. (Axiome de l'échange.) Si $A \subset X$, $a \in X$ et $b \in X$ alors $a \in \text{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \text{cl}(A)$ implique $b \in \text{cl}(A \cup \{a\})$.
- Une pré-géométrie (X, cl) est **homogène** si pour tout $A \subset X$, tout $a, b \in X \setminus \text{cl}(A)$, il existe un automorphisme de (X, cl) fixant A point par point et envoyant a sur b .
 - Une **géométrie** est une pré-géométrie (X, cl) tel que $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ et $\text{cl}(\{x\}) = \{x\}$ pour tout point $x \in X$.

Exemple 5.6. 1. **Géométries triviales** : tout ensemble X muni de la clôture qui à $A \subset X$ associe A est une géométrie.

2. Tout espace vectoriel E muni de la clôture qui à $A \subset E$ associe le sous-espace vectoriel engendré par A est une pré-géométrie.
3. **Géométries affines** : tout espace affine F muni de la clôture qui à $A \subset F$ associe le sous-espace affine engendré par A est une géométrie.
4. Tout corps muni de la clôture algébrique (au sens classique) est une pré-géométrie. (Toutes ces pré-géométries sont homogènes.)

Proposition 5.7. Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale. Alors M munie de la clôture algébrique est une pré-géométrie.

Démonstration. Les conditions 1,2 et 3 correspondent à l'exercice 3.17. Remarquons que dans \mathcal{M} , $a \not\perp_A B$ si et seulement si $a \in \text{acl}(A \cup B) \setminus \text{acl}(A)$. L'axiome de l'échange se déduit donc de la symétrie de l'indépendance. \square

Remarque. 1. On peut montrer directement l'axiome de l'échange à partir de la définition d'un ensemble fortement minimal. (Exercice.)

2. De manière plus général si D est un ensemble fortement minimal dans une structure \mathcal{M} alors D muni de la clôture qui à $A \subset D$ associe $\text{acl}(A) \cap D$ est une pré-géométrie.

Définition. Soit (X, cl) une pré-géométrie.

1. Une partie $A \subset X$ est **libre** si pour tout $a \in A$, $a \notin \text{cl}(A \setminus \{a\})$
2. Une partie $A \subset X$ est une **base** de X si A est libre et $X = \text{cl}(A)$.

Proposition 5.8. Soit (X, cl) une pré-géométrie. Alors toute partie libre de X peut se compléter en une base et toutes les bases de X ont même cardinal. On appelle **dimension** de X , notée $\dim(X)$, le cardinal de ses bases.

Démonstration. Même preuve que pour un espace vectoriel. \square

Définition - Proposition 5.9. Soient (X, cl) une pré-géométrie et Y et Z deux parties de X .

1. Une partie $A \subset X$ est **libre** au-dessus de Z si pour tout $a \in A$, $a \notin \text{cl}(A \setminus \{a\} \cup Z)$
2. Une partie $A \subset X$ est une **base** de Y au-dessus de Z si A est libre au-dessus de Z et $Y \subset \text{cl}(A \cup Z)$.

De même que précédemment Y a une base au-dessus de Z et toutes ses bases au-dessus de Z ont même cardinal que l'on note $\dim(Y/Z)$. De plus si $Z \subset Y$ et Y est de dimension finie alors $\dim(Y) = \dim(Y/Z) + \dim(Z)$.

Définition. Soit (X, cl) une pré-géométrie. La **géométrie quotient** de (X, cl) par Y (ou la **localisée** de X à Y) est la géométrie (X', cl') où $X' = \{\text{cl}(Y \cup \{a\}) : a \in X \setminus \text{cl}(Y)\}$ et pour $A \subset X'$, $\text{cl}'(A) = \{\text{cl}(Y \cup \{a\}) : a \in \text{cl}(\cup_{B \in A} B) \setminus \text{cl}(Y)\}$.

On vérifie facilement que $\dim(X') = \dim(X/Y)$.

Exemple 5.10. Géométries projectives : la géométrie quotient de chaque espace vectoriel par $\{0\}$ (ou \emptyset). (Géométrie sur l'ensemble des droites vectoriels).

Remarque. On appellera géométrie d'une structure fortement minimale \mathcal{M} , la localisée de (M, acl) à $\text{acl}(\emptyset)$ (ou \emptyset).

Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale et $A \subset M$. Comme $\text{RM}(M) = 1$ et $\text{dM}(M) = 1$ il y a un unique type p non algébrique dans $S_1(\emptyset)$ qui a une unique extension non déviante à A notée $p|_A$.

Lemme 5.11. Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale, $A \subset M$ et p l'unique type non algébrique dans $S_1(\emptyset)$. Si (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) sont deux uples libres au-dessus de A alors ils ont même type sur A : on notera ce type $p|_A^n$.

Démonstration. On montre le résultat par induction sur n . Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux uples libres au-dessus de A et supposons par hypothèse d'induction que $\text{tp}(a_1, \dots, a_{n-1}/A) = \text{tp}(b_1, \dots, b_{n-1}/A)$. Alors dans une extension élémentaire, il existe un automorphisme fixant A point par point qui envoie (a_1, \dots, a_{n-1}) sur (b_1, \dots, b_{n-1}) . On peut donc supposer que $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_1, \dots, b_{n-1})$. Alors a_n et b_n réalisent tous les deux $p|_{A \cup \{a_1, \dots, a_{n-1}\}}$ et donc ont même type. \square

La proposition suivante montre en particulier que le type $p|_A^n$ est de rang n .

Proposition 5.12. Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale, $A \subset M$ et $a_1, \dots, a_n \in M$. Alors

$$\text{RM}(a_1, \dots, a_n/A) = \dim(\{a_1, \dots, a_n\}/A).$$

Démonstration. Remarquons que si a_{k+1}, \dots, a_n sont algébriques sur $A \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ alors par 4.29,

$$\text{RM}(a_1, \dots, a_n/A) = \text{RM}(a_1, \dots, a_k/A).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout (a_1, \dots, a_n) libre au-dessus de A ,

$$\text{RM}(a_1, \dots, a_n/A) = n,$$

c'est-à-dire que $p_{|A}^n$ est de rang n .

Nous montrons le résultat par récurrence sur n . C'est évident pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour tout $0 < i \leq n$. Soit $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ libre au-dessus de A . Alors (a_1, \dots, a_n) est libre au-dessus de $A \cup \{a_{n+1}\}$. Donc $\text{RM}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}/A \cup \{a_{n+1}\}) = \text{RM}(a_1, \dots, a_n/A \cup \{a_{n+1}\}) = n$. De plus $a_1 \dots a_n a_{n+1} \not\ll_A a_{n+1}$ car $a_{n+1} \not\ll_A a_1 \dots a_n a_{n+1}$, donc $\text{RM}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}/A) \geq n+1$. Par hypothèse d'induction pour tout $B \supset A$ (dans toute extension élémentaire de M), $p_{|B}^{n+1}$ est alors le seul type dans $S_{n+1}(B)$ de rang supérieur ou égal à $n+1$. Donc $\text{RM}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}/A) = n+1$. \square

Corollaire 5.13. *Soit K un corps algébriquement clos. Alors pour tout $\bar{a} \in K$ et k sous-corps de K , le rang de Morley de \bar{a} sur k est égal au degré de transcendance de $k(\bar{a})$ sur k . (La dimension d'une variété affine $V \subset K^n$ est égale au rang de Morley de V .)*

Exercice 5.14. Une structure fortement minimale \mathcal{M} est ω -saturée si et seulement si M est de dimension infinie.

5.2 Théories fortement minimales et catégoricité

Définition 5.15. Une théorie complète est **fortement minimale** si et seulement si tous ses modèles sont fortement minimaux.

Exercice 5.16. Soit T une théorie complète. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

1. T est fortement minimale.
2. Tout modèle de T est minimal.
3. T a un modèle ω -saturé minimal.
4. Pour tout modèle \mathcal{M} de T et tout ensemble de paramètres A , il y a un unique type non algébrique au-dessus de A .

Proposition 5.17. *Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux modèles d'une même théorie complète fortement minimale. Alors \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimensions.*

Démonstration. \Rightarrow : si σ est un isomorphisme de \mathcal{M}_1 sur \mathcal{M}_2 alors A est une partie libre de M_1 si et seulement si $\sigma(A)$ est une partie libre de M_2 .

\Leftarrow : par le théorème de l'extension élémentaire commune on peut supposer que \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux sous-structures élémentaires d'une même structure \mathcal{N} . Soient A une base de M_1 et B une base M_2 . Soit f une bijection de A sur B . Alors f se prolonge en un unique isomorphisme partiel élémentaire σ de la sous-structure engendrée par

A sur la sous-structure engendrée par B car tout (a_1, \dots, a_n) dans A a même type que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$. Il existe alors un isomorphisme partiel élémentaire τ de domaine M_1 qui prolonge σ . Mais alors

$$\tau(M_1) = \tau(\text{acl}(A)) = \text{acl}(\tau(A)) = \text{acl}(B) = M_2.$$

□

Corollaire 5.18. *Une théorie complète fortement minimale est κ -catégorique pour tout $\kappa > |T|$.*

Démonstration. Si \mathcal{M} est un modèle de T de cardinal $\kappa > |T|$ alors $\dim(M) = \kappa$. □

Proposition 5.19. *Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale et $A \subset M$ algébriquement clos ($A = \text{acl}(A)$). Si A est infini alors A est une sous-structure élémentaire de \mathcal{M} .*

Démonstration. On vérifie le test de Tarski. Soit D une partie non vide de M définissable dans \mathcal{M} avec des paramètres dans A . Ou bien D est fini et alors $D \subset \text{acl}(A) = A$, ou bien D est cofini et comme A est infini, $D \cap A \neq \emptyset$. □

Corollaire 5.20. *Une théorie complète fortement minimale dénombrable est totalement catégorique si et seulement si pour toute partie finie A dans un modèle de T , la clôture algébrique de A est finie.*

Démonstration. \Leftarrow : si \mathcal{M} est modèle de T alors $\dim(M) = |M|$.

\Rightarrow : soit \mathcal{M} un modèle de T et A une partie finie de M tel que $\text{acl}(A)$ est infini. On peut supposer qu'il existe $b \in M \setminus \text{acl}(A)$. Alors $\text{acl}(A)$ et $\text{acl}(A \cup \{b\})$ sont des sous-structures élémentaires de \mathcal{M} car ce sont des parties infinies algébriquement closes. Ce sont alors deux modèles dénombrables de dimensions distinctes. □

Exercice 5.21. Une théorie fortement minimale dénombrable qui n'est pas ω -catégorique a exactement ω modèles dénombrables à isomorphisme près.

Voici un résultat généralisant l'exercice ci-dessus :

Fait 5.22 (Théorème de Baldwin-Lachlan). *Une théorie dénombrable κ -catégorique pour $\kappa > \omega$ (\aleph_1 -catégorique) qui n'est pas ω -catégorique a exactement ω modèles dénombrables à isomorphisme près.*

Exercice 5.23. Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale.

1. Montrer que (M, acl) est homogène.
2. Montrer que pour tout $A \subset M$ et pour tous uples \bar{a} et \bar{b} ayant même type sur A , \bar{a} et \bar{b} sont dans le même orbite par l'action des automorphismes de M qui fixent point par point A . (En particulier \mathcal{M} est ω -**fortement homogène** : deux uples \bar{a} et \bar{b} ayant même type (sur vide) sont dans le même orbite par l'action des automorphismes de M .)

5.3 Prégéométries localement modulaires

Définition 5.24. Soit (X, cl) une prégéométrie.

1. (X, cl) est **triviale** si pour tout A , $\text{cl}(A) = \cup_{a \in A} \text{cl}(\{a\})$; c'est-à-dire une partie B est libre si pour tout $a, b \in B$, $\{a, b\}$ est libre.
2. (X, cl) est **modulaire** si pour toutes parties closes de dimensions finies A et B ,

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

3. (X, cl) est **localement modulaire** si pour toutes parties closes de dimensions finies A et B telles que $\dim(A \cap B) > 0$,

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

Exercice 5.25. Soit (X, cl) une prégéométrie homogène telle que $X \neq \text{cl}(\emptyset)$. Alors (X, cl) est localement modulaire si et seulement si pour un $a \in X \setminus \text{cl}(\emptyset)$, la géométrie quotient de X par $\{a\}$ (c'est-à-dire la localisée à $\{a\}$) est modulaire, si et seulement si pour tout $a \in X \setminus \text{cl}(\emptyset)$, la géométrie quotient de X par $\{a\}$ est modulaire.

Exemple 5.26. 1. Les géométries triviales du 5.6 sont évidemment triviales dans le sens ci-dessus. Réciproquement, toute localisée d'une prégéométrie triviale est une géométrie triviale du type 5.6.

2. La structure $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ où S est la fonction successeur est fortement minimale et toute structure élémentairement équivalente à $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ a une prégéométrie triviale.
3. Les géométries affines sont localement modulaires mais non modulaires. (Considérer deux droites parallèles.)
4. Les géométries projectives sont modulaires.
5. Les prégéométries associées aux corps algébriquement clos ne sont pas localement modulaires : soient K un corps algébriquement clos ω -saturé et k un sous-corps algébriquement clos de degré de transcendance 1 (k est égal à la clôture algébrique d'un élément transcendant). Soit $(a, b, c) \in K^3$ libre au-dessus de k . Posons $A = \text{acl}(k(a, b))$ et $B = \text{acl}(k(c, ac+b))$. Alors $\text{acl}(A \cup B) = \text{acl}(k(a, b, c))$ et $A \cap B = k$. Donc $\dim(A \cup B) = 4$, $\dim(A) = \dim(B) = 3$ et $\dim(A \cap B) = 1$.

Pendant de nombreuses années, les exemples ci-dessus étaient les seuls types connus de prégéométries issues de structures fortement minimales. On a alors pensé qu'ils n'en existaient pas d'autres. Cette intuition ne s'est avérée juste que pour les géométries localement modulaires : toutes géométries localement modulaires provenant d'une structure fortement minimale est triviale, affine ou projective. Pour l'autre cas, Zil'ber avait conjecturé que toute structure fortement minimale non localement modulaire interprète un corps algébriquement clos. Hrushovski a réfuté cette conjecture à la fin des années 80 en construisant un exemple non localement modulaire qui n'interprète pas de groupe infini.

Donnons ici la définition de l'interprétation :

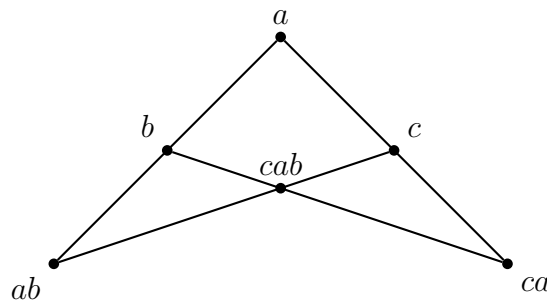
Définition 5.27. Soient \mathcal{M} une structure, G un groupe et Γ le graphe de la multiplication de ce groupe. On dit que G est interprétable dans \mathcal{M} s'il existe $n > 0$, D une partie de M^n définissable, E une relation d'équivalence sur D définissable et S une partie définissable de D^3 tels que l'on ait une bijection de G sur D/E qui envoie Γ sur S/E^3 .

La définition est analogue pour un corps et en fait pour toute autre structure.

5.4 Configuration de groupes

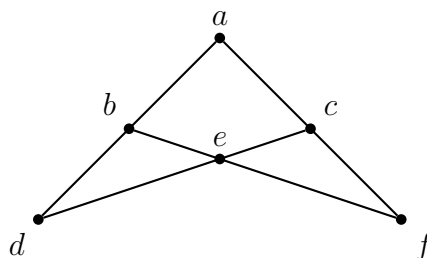
Cette dernière partie a pour but de donner une idée de la construction d'un groupe infini dans une structure fortement minimale localement modulaire non triviale.

Remarquons que dans un groupe G fortement minimal on a la configuration suivante à partir de trois éléments $a, b, c \in G$ formant un ensemble libre :



Dans cette configuration aucun des points n'est dans la clôture d'un autre, et un point est dans la clôture de deux autres si et seulement si un segment de cette configuration contient ces trois points.

Définition. Une configuration de groupe dans une prégéométrie (X, cl) est la donnée de 6 points a, b, c, d, e, f et d'une partie $A \subset X$ telle que pour tous points distincts $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$, $x \notin \text{cl}(A \cup \{y\})$ et telle que pour tous points distincts $x, y, z \in \{a, b, c, d, e, f\}$, $x \in \text{cl}(A \cup \{y, z\})$ si et seulement si x, y et z sont alignés dans la configuration suivante :



Notons que les points sont de dimension 1 sur A , que les lignes sont de dimension 2 sur A et que l'ensemble des points est de dimension 3 sur A .

Lemme 5.28. Soit (X, cl) une prégéométrie homogène, localement modulaire non triviale et de dimension infinie. Il existe alors une configuration de groupe dans X .

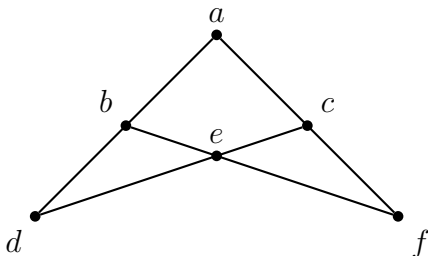
Démonstration. Comme X n'est pas triviale, il existe une partie $A \subset X$ finie et deux éléments $a, b \in X$ tels que $\text{cl}(A \cup \{a, b\}) \neq \text{cl}(A \cup \{a\}) \cup \text{cl}(A \cup \{b\})$. On peut supposer que $\dim(A) > 0$. Soit $d \in \text{cl}(A \cup \{a, b\}) \setminus (\text{cl}(A \cup \{a\}) \cup \text{cl}(A \cup \{b\}))$. Comme X est de dimension infinie il existe $c \in X \setminus \text{cl}(A \cup \{a, b\})$. Par homogénéité, il existe $f \in \text{cl}(A \cup \{a, c\}) \setminus (\text{cl}(A \cup \{a\}) \cup \text{cl}(A \cup \{c\}))$. Alors $\{c, d\}$ est libre au-dessus de A (sinon $c \in \text{cl}(A \cup \{d\}) \subset \text{cl}(A \cup \{a, b\})$) et de même $\{b, f\}$ est libre au-dessus de A . De plus $d, f \in \text{cl}(A \cup \{a, b, c\})$. Par modularité, $\dim(\text{cl}(A \cup \{c, d\}) \cap \text{cl}(A \cup \{b, f\})/A) = \dim(\text{cl}(A \cup \{c, d\})/A) + \dim(\text{cl}(A \cup \{b, f\})/A) - \dim(\text{cl}(A \cup \{c, d, b, f\})/A) = 2 + 2 - 3$. Donc il existe $e \in \text{cl}(A \cup \{c, d\}) \cap \text{cl}(A \cup \{b, f\}) \setminus \text{cl}(A)$. On vérifie alors facilement que a, b, c, d, e, f forment un diagramme de groupe au-dessus de A . \square

Proposition 5.29. *Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale ω -saturée dont la pré-géométrie (M, acl) contient une configuration de groupe alors il existe un groupe infini interprétable dans \mathcal{M} .*

Remarque. A partir d'une configuration de groupe a, b, c, d, e, f au-dessus de A dans \mathcal{M} une structure fortement minimale ω -saturée, on peut supposer $\text{dcl}(\emptyset) = \text{acl}(\emptyset)$ infini et A vide : il suffit de considérer $B \supset A$ telle que $B \downarrow_A abcdef$, $\text{acl}(B)$ infini et $\dim(M/B)$ infini et d'ajouter tous les éléments de $\text{acl}(B)$ aux constantes du langage.

La preuve de la proposition 5.29 se décompose en deux parties. La première partie consiste à montrer que l'on peut supposer dans la configuration de groupe que $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, f\})$. En fait cette hypothèse s'obtient dans une structure interprétable dans \mathcal{M} : on doit remplacer les éléments a, b, c, d, e, f par des éléments **imaginaires** : un élément imaginaire est la classe d'un uple par une relation d'équivalence définissable dans \mathcal{M} . Nous ne montrerons pas cette première partie. Dans la seconde partie on construit une groupe à partir des éléments a, c, f . Nous donnerons une idée de la preuve de cette deuxième partie en supposant pour simplifier que la configuration de groupe avec l'hypothèse supplémentaire se trouve réellement dans M . On considère donc pour la suite les hypothèses suivantes :

Hypothèses. Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale ω -saturée telle que $\text{dcl}(\emptyset) = \text{acl}(\emptyset)$ est infini et 6 points a, b, c, d, e, f qui forment une configuration de groupe sur le vide vérifiant de plus que $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, f\})$:



Pour $x, y, z \in \{a, b, c, d, e, f\}$ distincts, on a
 $\dim(\{x\}) = 1$,
 $\dim(\{x, y\}) = 2$,
 $\dim(\{x, y, z\}) = 3$ si x, y, z non alignés,
 $\text{acl}(\{x, y, z\}) = \text{acl}(\{x, y\})$ si x, y, z alignés,
 $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, f\})$.

Remarquons que l'hypothèse $\text{acl}(\emptyset)$ est infini implique que toute partie algébriquement close de \mathcal{M} est sous-structure élémentaire de \mathcal{M} et de plus l'hypothèse $\text{dcl}(\emptyset) = \text{acl}(\emptyset)$ implique que $\text{dcl}(\emptyset) \prec \mathcal{M}$.

L'hypothèse $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, e\})$ implique l'existence d'une formule $\phi(x, y, z)$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a, c, f)$ et tel que $\mathcal{M} \models \forall z(\phi(a, c, z) \rightarrow z = f) \wedge \forall y(\phi(a, y, f) \rightarrow z = c)$.

Notons p l'unique type non algébrique sur le vide et p^2 le type des couples de réalisations indépendantes de p .

Lemme 5.30. *Soit $\theta(x_1, x_2, y, y') := \exists z\phi(x_1, y, z) \wedge \phi(x_2, y', z)$. Pour tout (a_1, a_2) réalisation de p^2 dans \mathcal{M} , $\theta(a_1, a_2, y, y')$ définit une fonction f_{a_1, a_2} de $M \setminus \text{acl}(a_1, a_2)$ dans lui-même.*

Démonstration. Soit $i \in M \setminus \text{acl}(a_1, a_2)$, c'est-à-dire i réalisation de p tel que $i \perp a_1 a_2$. Alors $a_1 i$ a même type que ac . Donc il existe un unique j tel que $\mathcal{M} \models \phi(a_1, i, j)$. De plus j réalise p , $j \perp a_1$ et $j \in \text{dcl}(a_1, i)$. Mais $i \perp_{a_1} a_2$, donc $j \perp_{a_1} a_2$, d'où $j \perp a_1 a_2$. De même il existe un unique i' tel que $\mathcal{M} \models \phi(a_2, i', j)$ et à nouveau i' réalise p et $i' \perp a_1 a_2$. Donc i' est l'unique élément de \mathcal{M} tel que $\mathcal{M} \models \theta(a_1, a_2, i, i')$. \square

Nous allons maintenant définir les "germes" des fonctions précédentes :

Lemme 5.31. *Pour deux réalisations (a_1, a_2) et (a_3, a_4) de p^2 , on définit $f_{a_1, a_2} \sim f_{a_3, a_4}$ si pour toute réalisation i de p tel que $i \perp a_1 a_2 a_3 a_4$, $f_{a_1, a_2}(i) = f_{a_3, a_4}(i)$.*

*Alors \sim est une relation d'équivalence. On note $[a_1, a_2]$ la classe d'équivalence de f_{a_1, a_2} (le **germe** de f_{a_1, a_2}). De plus il existe une relation d'équivalence définissable sans paramètre $E(x_1, x_2, x_3, x_4)$ telle que pour toutes réalisations (a_1, a_2) et (a_3, a_4) de p^2 , $[a_1, a_2] = [a_3, a_4]$ si et seulement si $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$.*

Démonstration. Remarquons que $f_{a_1, a_2} \sim f_{a_3, a_4}$ si et seulement si il existe i une réalisation de p tel que $i \perp a_1 a_2 a_3 a_4$ et $f_{a_1, a_2}(i) = f_{a_3, a_4}(i)$ si et seulement la formule $f_{a_1, a_2}(y) = f_{a_3, a_4}(y)$ est dans l'unique extension non déviante de p à $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. On en déduit d'une part que \sim est une relation d'équivalence et d'autre part que cette relation est définissable sans paramètre par définissabilité du type p . \square

Les germes sont des éléments de M^2/E et donc des éléments imaginaires de la structure \mathcal{M} . Pour la suite on se place dans la structure à deux sortes $\mathcal{M}^E = \langle M, M^2/E, L, f_E \rangle$ où f_E est la fonction de M^2 sur M^2/E qui envoie (x_1, x_2) sur $(x_1, x_2)/E$. Une **structure à plusieurs sortes** est une structure où l'on considère plusieurs domaines distincts, les **sortes**, telle que chaque variable est associée à une sorte, de même chaque constante du langage et telle que dans les relations et les fonctions sont précisées les sortes des variables sur lesquelles elles s'appliquent. Tout ce qui a été vu précédemment dans ce cours se généralise facilement aux structures à plusieurs sortes.

Il est facile de vérifier que si \mathcal{N} est une sous-structure (respectivement extension) élémentaire de \mathcal{M} alors \mathcal{N}^E est une sous-structure (respectivement extension) élémentaire de \mathcal{M}^E , que toute sous-structure (respectivement extension) élémentaire est de

cette forme et que si σ est un automorphisme de \mathcal{N} alors σ se prolonge en un unique automorphisme de \mathcal{N}^E en envoyant les éléments $f_E(x_1, x_2)$ sur $f_E(\sigma(x_1), \sigma(x_2))$. On admettra que la saturation, la stabilité, la totale transcendance passe de \mathcal{M} à \mathcal{M}^E : la structure \mathcal{M}^E est donc ω -saturée et totalement transcendante.

Nous noterons dcl^E (respectivement acl^E) la clôture définissable (respectivement algébrique) au sens de \mathcal{M}^E .

Remarque. Soit $A \subset M$. Alors $\text{acl}^E(A)$ est une sous-structure élémentaire de \mathcal{M}^E et $\text{acl}^E(A) = \text{dcl}^E(\text{acl}(A))$.

Démonstration. Par les hypothèses sur \mathcal{M} , $\text{acl}(A) \prec \mathcal{M}$. Donc $(\text{acl}(A))^E \prec \mathcal{M}^E$ et $(\text{acl}(A))^E$ est algébriquement clos. D'où $\text{acl}^E(A) = (\text{acl}(A))^E = \text{dcl}^E(\text{acl}(A))$. \square

Remarquons que tous les germes des fonctions précédentes ont même type dans la théorie de \mathcal{M}^E . On notera q ce type. En particulier l'ensemble de ces germes est une intersection d'ensembles définissables.

Lemme 5.32. Soient $\alpha = [a_1, a_2]$ un germe et i une réalisation de p tel que $i \perp a_1 a_2$. Alors $\alpha(i) \in \text{dcl}^E(\alpha, i)$.

Démonstration. L'élément $\alpha(i)$ est l'unique y' tel que

$$\exists(x_1, x_2) \models p^2, x_1 x_2 \perp i, [x_1, x_2] = \alpha \text{ et } f_{x_1, x_2}(i) = y'.$$

Notons $p_{\{i\}}^2$ l'unique extension non déviante de p^2 sur $\{i\}$. Par un argument de compacité on a

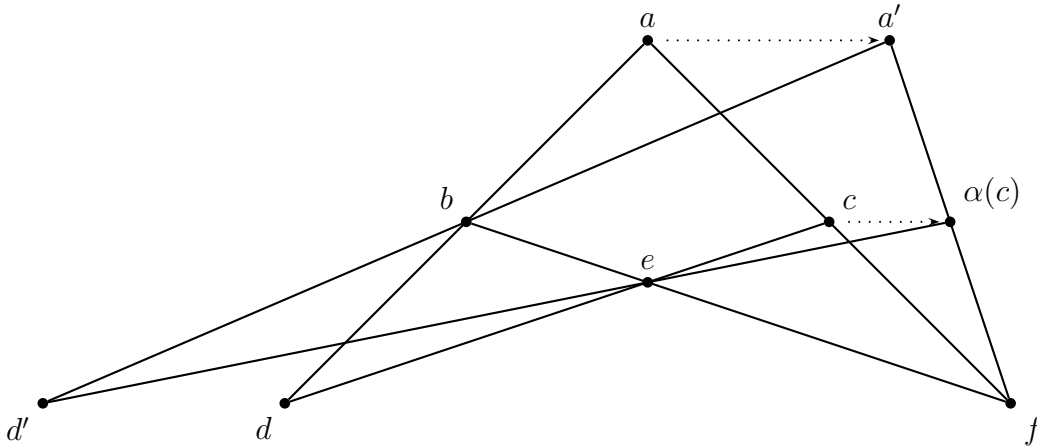
$$\{\exists x_1 \exists x_2 (\psi(x_1, x_2, i) \wedge f_E(x_1, x_2) = \alpha \wedge \theta(x_1, x_2, i, y')) : \psi \in p_{\{i\}}^2\} \vdash y' = \alpha(i).$$

A nouveau par compacité il existe une formule $\psi(x_1, x_2, i) \in p_{\{i\}}^2$ telle que la formule $\exists x_1 \exists x_2 (\psi(x_1, x_2, i) \wedge f_E(x_1, x_2) = \alpha \wedge \theta(x_1, x_2, i, y'))$ défini $\{\alpha(i)\}$. \square

Lemme 5.33. Le type q est de rang 1. Si $[a_1, a_2]$ est un germe alors $[a_1, a_2] \perp a_1$ et $[a_1, a_2] \perp a_2$.

Démonstration. Soit a' une réalisation de p tel que $a' \perp abc$. Notons $\alpha = [a, a']$. Remarquons tout de suite que $\text{RM}(\alpha) \leq 2$ car $\alpha \in \text{dcl}^E(a, a')$ et $\text{RM}(aa') = 2$.

On a $a \perp bf$ et $a' \perp bf$, donc a et a' ont même type au-dessus de $\text{acl}(\{b, f\})$. Il existe donc un automorphisme σ qui envoie a sur a' et qui fixe point par point $\text{acl}(\{b, f\})$. Notons $d' = \sigma(d)$. Par définition, $\alpha(c) = \sigma(c)$. Nous obtenons le diagramme suivant :



Comme $a' \perp ac$, $a' \perp cf$, $a'f \perp c$ et donc $\alpha(c) \perp c$. Par le lemme précédent $\alpha(c) \in \text{dcl}^E(\alpha, c)$ donc α n'est pas algébrique.

Nous allons montrer que $\alpha \in \text{acl}^E(d, d')$. Comme $a' \perp abc$, $a' \perp_{ab} c$ et comme $c \perp ab$, on a $c \perp aa'b$ et donc $c \perp aa'bdd'$. D'où $aa' \perp_{dd'} c$ et donc $\alpha \perp_{dd'} c$. Pour montrer que $\alpha \in \text{acl}^E(d, d')$ il suffit donc de montrer que $\alpha \in \text{acl}^E(d, d', c)$.

Pour cela il suffit de montrer que tout automorphisme (d'une extension élémentaire de \mathcal{M}^E) qui fixe point par point $\text{acl}^E(d, d', c)$, fixe α . Considérons τ un tel automorphisme. Notons que $\tau(\alpha) = [\tau(a), \tau(a')]$. Soit i une réalisation de p tel que $i \perp aa'\tau(a)\tau(a')dd'$. Il existe donc τ_0 un automorphisme qui fixe $\text{acl}^E(d, d', i)$ et qui envoie aa' sur $\tau(a)\tau(a')$ car aa' et $\tau(a)\tau(a')$ ont même type sur $\text{acl}^E(d, d')$ et donc même type sur $\text{acl}^E(d, d', i)$. Comme $\alpha(c) \in \text{acl}(dd'c)$ et i a même type que c au-dessus de $\{aa'dd'\}$ (car $c \perp aa'dd'$ et $i \perp aa'dd'$) donc $\alpha(i) \in \text{acl}(dd'i)$. D'où

$$\alpha(i) = \tau_0(\alpha(i)) = (\tau_0(\alpha))(\tau_0(i)) = (\tau(\alpha))(i).$$

C'est-à-dire $f_{a,a'}(i) = f_{\tau(a), \tau(a')}(i)$ donc $\alpha = \tau(\alpha)$.

Donc $\alpha \in \text{acl}^E(d, d')$. Comme $a' \perp ab$, $a' \perp ad$ et $aa' \perp d$. Donc $\alpha \perp d$. D'où

$$\text{RM}(\alpha) = \text{RM}(\alpha/d) = \text{RM}(d\alpha/d) < \text{RM}(d\alpha) \leq \text{RM}(dd') = 2.$$

Par conséquent $\text{RM}(\alpha) \leq 1$ et comme α n'est pas algébrique $\text{RM}(\alpha) = 1$.

Montrons que $\alpha \perp a$. Sinon $\alpha \in \text{acl}^E(a)$ et donc $\alpha(c) \in \text{acl}(a, c)$ mais alors $a' \in \text{acl}(ac)$ ce qui contredit $a' \perp ac$. On fait de même pour $\alpha \perp a'$. \square

Remarque. Pour $\alpha = [a_1, a_2]$ et $\beta = [a_3, a_4]$, $\alpha \circ \beta(i)$ est défini pour $i \perp a_1a_2a_3a_4$. En effet on a alors $i \perp_{a_3a_4} a_1a_2$ donc $\beta(i) \perp_{a_3a_4} a_1a_2$ et donc $\beta(i) \perp a_1a_2$ car $\beta(i) \perp a_1a_2$.

Dans le sens ci-dessus tout germe $\alpha = [a_1, a_2]$ a un inverse $\alpha^{-1} = [a_2, a_1]$ (remarquons que $\alpha^{-1} \in \text{dcl}^E(\alpha)$). Par contre la composée de deux germes n'en est pas a priori un. Le lemme suivant montre que c'est le cas pour deux germes indépendants.

Lemme 5.34. *Si α et β sont deux réalisations de q tel que $\alpha \perp \beta$ alors il existe a_1, a_2, a_3 trois réalisations indépendantes de p tel que $\alpha = [a_1, a_2]$, $\beta = [a_2, a_3]$. En particulier pour $i \perp a_1 a_2 a_3$, $\alpha \circ \beta(i) = \gamma(i)$ où $\gamma = [a_1, a_3]$. De plus $\gamma \perp \alpha$ et $\gamma \perp \beta$.*

Démonstration. Tout type sur le vide dans \mathcal{M}^E est de degré 1 car $\text{dcl}^E(\emptyset)$ est une sous-structure élémentaire de \mathcal{M}^E , donc tous les couples de réalisations indépendantes de q ont même type. Il suffit donc de montrer que si a_1, a_2, a_3 sont trois réalisations indépendantes de p alors $[a_1, a_2] \perp [a_2, a_3]$ et le reste ce déduit par permutation des indices. On a $a_1 \perp a_2 a_3$ donc $a_1 \perp a_2 [a_2, a_3]$, $a_1 \perp_{a_2} [a_2, a_3]$. D'où $[a_2, a_3] \perp a_1 a_2$ car $[a_2, a_3] \perp a_2$. Par conséquent $[a_2, a_3] \perp [a_1, a_2]$. \square

Remarque. Dans le lemme précédent γ étant un germe, il est uniquement déterminé et $\gamma \in \text{dcl}^E(\alpha, \beta)$. Pour la suite on identifiera γ et $\alpha \circ \beta$.

Notons X l'ensemble des germes dans \mathcal{M}^E . Afin d'obtenir un ensemble clos par composition, on va maintenant considérer les germes de composées de deux éléments de X .

Lemme 5.35. *Pour quatre germes $\alpha = [a_1, a_2]$, $\beta = [a_3, a_4]$, $\gamma = [b_1, b_2]$ et $\delta = [b_3, b_4]$ on définit $(\alpha, \beta) \equiv (\gamma, \delta)$ si pour toute réalisation i de p tel que $i \perp a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4$, $\alpha \circ \beta(i) = \gamma \circ \delta(i)$.*

Alors \equiv est une relation d'équivalence. On note $\alpha \cdot \beta$ la classe d'équivalence de (α, β) . Il existe de plus une relation d'équivalence E' définissable sans paramètre dans le langage L telle que pour toutes réalisations (a_1, a_2) , (a_3, a_4) , (b_1, b_2) et (b_3, b_4) de p^2 , $[a_1, a_2] \cdot [a_3, a_4] = [b_1, b_2] \cdot [b_3, b_4]$ si et seulement si $E'(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$.

Démonstration. La preuve est identique au lemme 5.31. \square

Lemme 5.36. *Soit $G := X \cdot X$. Alors G est un groupe infini interprétable dans \mathcal{M} .*

Démonstration. Les éléments de G sont inversibles car c'était déjà le cas pour les éléments de X .

Pour montrer que G est stable par composition il suffit de montrer que la composition de trois éléments de X correspond à la composition de deux éléments de X . Soient α, β et γ dans X . Considérons $\delta \perp \alpha \beta \gamma$. Alors $\beta \circ \delta \in X$. De plus $\beta \circ \delta \in \text{dcl}^E(\beta, \delta)$ donc $\beta \circ \delta \perp_{\beta} \alpha$. Comme $\beta \circ \delta \perp \beta$, on a $\beta \circ \delta \perp \alpha$ et donc $\alpha \circ \beta \circ \delta \in X$. De l'autre côté, comme $\delta^{-1} \in \text{dcl}^E(\delta)$, $\delta^{-1} \perp \gamma$ donc $\delta^{-1} \circ \gamma \in X$. D'où

$$\alpha \circ \beta \circ \gamma = (\alpha \circ \beta \circ \delta) \circ (\delta^{-1} \circ \gamma).$$

Ainsi G est un groupe infini (X étant infini).

L'ensemble G peut être vu comme partie de M^4/E' . On peut vérifier facilement que G est une intersection infinie d'ensembles définissables de $\mathcal{M}^{E'}$ et qu'il existe une formule $\psi(u, v, w)$ tel que pour tout g_1, g_2 et g_3 dans G , $\mathcal{M}^{E'} \models \psi(g_1, g_2, g_3)$ si et seulement si $g_1 \circ g_2 = g_3$. Le groupe G est donc infiniment définissable dans la structure $\mathcal{M}^{E'}$. Par le théorème 4.42, puisque $\mathcal{M}^{E'}$ est totalement transcendante, G est en fait définissable dans $\mathcal{M}^{E'}$, ce qui implique que le groupe G est interprétable dans \mathcal{M} . \square