Correction rapide du devoir 4

ATTENTION : C'est un corrigé **rapide**. Certains arguments doivent être explicités ou complétés par vos soins.

Exercice 1. On peut énumérer les classes définies par les E_i de la manière suivante : $M = C_\emptyset$ l'unique classe définie par E_0, pour tout $i > 0$, on note $C_{j_1 \dots j_i}$ pour $j_1 \dots j_i$ suites finies de 0 et 1, les classes définies par E_i de telle façon que $C_{j_1 \dots j_{i-1}} = C_{j_1 \dots j_{i-1}0} \cup C_{j_1 \dots j_{i-1}1}$. Soit pour tout $j_1 \dots j_i$, un représentant $a_{j_1 \dots j_i}$ de la classe $C_{j_1 \dots j_i}$. L'ensemble A de ces représentants est dénombrable mais il y a 2^ω types sur A : en effet par compacité, pour toute suite $(j_i)_{i \in \omega}$ de 0 et 1, $\{E(x, a_{j_1 \dots j_i}) : i \in \omega\}$ est consistant.

Afin de montrer que $\mathcal{M}$ est κ-stable pour tout $\kappa \geq 2^\omega$, on peut vérifier facilement que $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ élimine les quanteurs (utiliser pour cela la méthode des va-et-vients entre modèles ω-saturés) et en déduire que pour tout ensemble de paramètres A, $|S_1(A)| \leq \max\{2^\omega, |A|\}$.

Exercice 2. On a $\mathrm{RM}(D_1 \cup D_2) \geq \max\{\mathrm{RM}(D_1)\mathrm{RM}(D_2)\}$ car $D_1 \subset D_1 \cup D_2$ et $D_2 \subset D_1 \cup D_2$.

Montrons l'autre inégalité : pour cela vérifions par induction sur α que pour toutes parties définissables D_1 et D_2, $\mathrm{RM}(D_1 \cup D_2) \geq \alpha$ implique que $\max\{\mathrm{RM}(D_1)\mathrm{RM}(D_2)\} \geq \alpha$.

Pour $\alpha = 0$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai pour tout $\beta < \alpha$. Soient D_1 et D_2 deux parties définissables dans une structure $\mathcal{M}$ telles que $\mathrm{RM}(D_1 \cup D_2) \geq \alpha$.

Soit α est limite alors par hypothèse d'induction $\max\{\mathrm{RM}(D_1)\mathrm{RM}(D_2)\} \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$ et donc $\max\{\mathrm{RM}(D_1)\mathrm{RM}(D_2)\} \geq \alpha$.

Soit $\alpha = \lambda + 1$. Il existe alors dans une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, une famille $(E_i)_{i \in \omega}$ de parties de $D_1 \cup D_2$ deux à deux disjointes, définissables dans $\mathcal{N}$ et de rangs supérieurs ou égals à λ. Par hypothèse d'induction, pour chaque $i \in \omega$, ou bien $\mathrm{RM}(E_i \cap D_1) \geq \lambda$ ou bien $\mathrm{RM}(E_i \cap D_2) \geq \lambda$ car $E_i = (E_i \cap D_1) \cup (E_i \cap D_2)$. On en déduit qu'il y a une infinité de i tel que $\mathrm{RM}(E_i \cap D_1) \geq \lambda$ ou qu'il y a une infinité de i tel que $\mathrm{RM}(E_i \cap D_2) \geq \lambda$. Donc que $RM(D_1) \geq \lambda + 1$ ou $RM(D_2) \geq \lambda + 1$.

Exercice 3. Soit $\phi \in L(A)$. Soit

$$\Sigma = \{\psi(\bar{x}) \in L(A) : \mathrm{RM}(\phi \wedge (\neg\psi)) < \mathrm{RM}(\phi)\}.$$

On vérifie facilement par compacité que Σ est consistant et on remarque que tout type sur A qui contient Σ a même rang que ϕ. D'où

$$\mathrm{RM}(\phi) = \max\{\mathrm{RM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p\}.$$

On peut de plus remarquer que si ϕ ne se découpe pas en deux formules de $L(A)$ de même rang que ϕ alors Σ est en fait un type complet et donc ϕ ne contient qu'un seul type complet de même rang, et ce type est de même degré que ϕ. On en déduit que

$$\mathrm{dM}(\phi) = \sum\{\mathrm{dM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p,\ \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\phi)\}.$$

Exercice 4. (a) La classe $\mathcal{C}$ correspond à la classe des modèles des axiomes suivants : pour chaque $i \neq j$ et entier $n > 0$:
– $\forall x \neg(P_i(x) \wedge P_j(y))$

- $\forall x \forall y E_i(x,y) \to (P_i(x) \wedge P_i(y))$
- $\forall x P_i(x) \to E_i(x,x)$
- $\forall x \forall y (P_i(x) \wedge P_i(y)) \to (E_i(x,y) \leftrightarrow E_i(y,x))$
- $\forall x \forall y \forall z (P_i(x) \wedge P_i(y) \wedge P_i(z)) \to ((E_i(x,y) \wedge E_i(y,z)) \to E_i(x,z))$
- $\exists x_1 ... \exists x_n \bigwedge_{k=1}^n P_i(x_k) \wedge \bigwedge_{k \neq l} \neg E_i(x_k, x_l)$
- $\forall x \exists x_1 ... \exists x_n \bigwedge_{k \neq l} (x_k \neq x_l) \wedge (P_i(x) \to \bigwedge_{k=1}^n E_i(x, x_k))$

(b) Considérons dans $L' := L(M) \cup \{c_0, .., c_n, ..\}$ l'ensemble d'énoncé

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\neg P_i(c_j) : i, j \in \omega\} \cup \{c_k \neq c_l : k \neq l\}.$$

Soit Σ_0 une partie finie de Σ. Alors il existe i_0 tel que

$$\Sigma_0 \subset \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\neg P_i(c_j) : i \leq i_0, j \in \omega\} \cup \{c_k \neq c_l : k \neq l\}.$$

En interprétant les c_j par une infinité d'éléments distincts de $P_{i_0+1}(M))$ on obtient un modèle de Σ_0. Donc Σ_0 est consistant. On en déduit par le théorème de compacité que Σ est consistant. Il existe donc une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ contenant une infinité d'éléments b_j tel que pour aucun i, $\mathcal{N} \models P_i(b_j)$. Comme $\mathcal{M}$ est ω-saturé, il existe une suite $(a_j)_{j \in \omega}$ tel que pour tout n, $(a_0, ..., a_n)$ a même type que $(b_0, ..., b_n)$. On en déduit que les a_j sont distincts et que pour aucun i, $\mathcal{M} \models P_i(a_j)$. Par conséquent l'ensemble $\{x \in M : \mathcal{M} \models \neg P_i(x) \text{ pour tout } i\}$ est infini.

(c) (**Rappel venant du cours** : pour montrer qu'une théorie est complète et élimine les quanteurs, on vérifie que pour tous modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ω-saturés, l'ensemble des isomorphismes partiels de $\mathcal{M}_1$ vers $\mathcal{M}_2$ entre des sous-structures finiment engendrées, est un va-et-vient.)

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux modèles ω-saturés de T. Considérons $\mathcal{F}$, l'ensemble des isomorphismes partiels de $\mathcal{M}_1$ vers $\mathcal{M}_2$ entre sous-structures finies. L'ensemble $\mathcal{F}$ est non vide : on peut considérer par exemple l'isomorphisme partiel qui envoie un élément de $P_0(M_1)$ sur un élément de $P_0(M_2)$.

Soient σ un isomorpisme partiel de domaine A et $x \in M_1 \setminus A$.

Ou bien pour tout i, $\mathcal{M}_1 \models \neg P_i(x)$. On prolonge σ, en envoyant x sur $y \in M_2 \setminus \sigma(A)$ tel que pour tout i, $\mathcal{M}_2 \models \neg P_i(y)$. Ceci est possible car, $\mathcal{M}_2$ étant ω-saturé, $\{y \in M_2 : \mathcal{M}_2 \models \neg P_i(y) \text{ pour tout } i\}$ est infini.

Ou bien il existe un unique i tel que $\mathcal{M}_1 \models P_i(x)$. S'il n'existe pas d'élément $a \in A$ tel que $\mathcal{M}_1 \models E_i(x,a)$, on prolonge σ, en envoyant x sur $y \in M_2 \setminus \sigma(A)$ tel que pour tout $a \in A$, $\mathcal{M}_2 \models \neg E_i(y, \sigma(a))$ ce qui est possible car il y a une infinité de classes d'équivalences. S'il existe $a \in A$ tel que $\mathcal{M}_1 \models E_i(x,a)$, on prolonge σ, en envoyant x sur $y \in M_2 \setminus \sigma(A)$ tel que $\mathcal{M}_2 \models E_i(y, \sigma(a))$ ce qui est possible car les classes sont infinies.

(d) -i- En utilisant l'éliminations des quanteurs, on obtient les 1-types suivants :

1. les types "$x = a$" pour chaque $a \in A$,
2. pour chaque $a \in A$ tel que $P_i(a)$ pour un i, le type detérminé par $x \notin A$ et $E_i(x,a)$,
3. pour chaque $i \in \omega$, le type déterminé par $P_i(x)$ et $\neg E_i(x,a)$ pour tout $a \in A$,
4. le type déterminé par $x \notin A$ et $\neg P_i(x)$ pour tout $i \in \omega$.

-ii- Soit $i \in \omega$. Chaque classe d'équivalence définie par E_i est infinie et il y a une infinité de classes d'équivalences, donc P_i contient une infinité de parties définissables deux à deux disjointes et toutes infinies. Par conséquent $\mathrm{RM}(P_i) \geq 2$.

-iii- Soit $a \in M$ tel que $P_i(a)$. Il y a un unique 1-type sur a dans $E_i(x,a)$ (type 2) non algébrique (type 1). Pour tout B contenant a, ce type a une unique extension non algébrique (type 2). Ce type est donc de rang de Morley 1 et de degré 1. Donc dans P_i il y a éventuellement des types algrébriques (type 1) sur A si $A \cap P_i \neq \emptyset$, des types de rang 1 (type 2) sur A si $A \cap P_i \neq \emptyset$, et donc un unique autre type (type 3). Cet autre type est necessairement de rang strictement supérieur à 1 car $\mathrm{RM}(P_i) \geq 2$.

-iv- D'après la question précédente, au-dessus de n'importe quel ensemble B de paramètres (dans des extensions élémentaires de $\mathcal{M}$) il y a un unique type de rang strictement supérieur à 1 dans P_i, qui est donc isolé des types de rang strictement supérieur à 1. Par conséquent le type 3 dans P_i sur $\emptyset$ est de rang 2 (sinon il aurait une extension qui serait point d'accumulation de types de rang supérieur ou égal à 2). Ce type est de degré 1, car pour tout B, il a une unique extension sur B de rang 2. On en déduit que P_i est de rang 2 et degré 1.

-v- On a $\mathrm{RM}(M) \geq 3$ car $\mathrm{RM}(P_i) = 2$ pour chaque i. Les types 1, 2, 3 sont de rangs inférieurs ou égaux à 2. Donc sur tout ensemble de paramètres B, le type 4 est l'unique type de rang strictement supérieur à 2. De même que pour la question précédente, on en déduit que $\mathcal{M}$ est de rang 3 et degré 1.

-vi- Remarquons que tous les types de cette théorie sont de degré 1, c'est-à-dire stationnaires.