Devoir 2
à retourner le 9 novembre

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de théorie dans le langage des anneaux dont les modèles sont précisément les corps finis.

Exercice 2. Soient I un ensemble infini et U un ultrafiltre.

(a) Montrer que :
- ou bien U est **principal**, c'est-à-dire il existe $a \in I$ tel que $U = \{X \subseteq I : a \in X\}$,
- ou bien U contient toute partie cofinie de I.

(b) Montrer que le lemme de Zorn implique l'existence d'un ultrafiltre non principal.

Exercice 3. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et U un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. Notons $\mathcal{M}^U$ l'ultraproduit $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}/U$.

(a) Montrer que $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement dans $\mathcal{M}^U$.

(b) Que peut-on dire de $\mathcal{M}^U$ si U est principal ?

(c) Supposons que $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, < \rangle$ et que U n'est pas principal. En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\mathcal{M}^U$ contient des éléments strictement positifs infiniment petits et des éléments infiniments grands.

Exercice 4. Montrer que les deux énoncés du théorème de compacité (Théorème 2.1 et 2.4) sont équivalents.

Exercice 5. Déterminer les cardinaux κ pour lesquels la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies est κ-catégorique. Même question pour la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.

Exercice 6. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires (on dit alors que ce sont des prédicats). Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
2. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. Montrer que $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire $\mathcal{N}$ qui contient une infinité de points qui ne sont dans aucun des prédicats P_i.
3. En déduire que T est complète.

Exercice 7. Soit T la théorie de $\langle \mathbb{Z}, S\rangle$ où S est la fonction successeur ($S(n) = n + 1$, pour tout entier n.)

1. Montrer que tout modèle de T est isomorphe une union de copies de $\langle \mathbb{Z}, S\rangle$.
2. En déduire que T est κ-catégorique pour tout κ infini non dénombrable.
3. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables à isomorphismes près ?
4. Soient $\mathcal{M}$ un modèle de T non dénombrable et $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$, $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ deux n-uples dans M tels que pour tout i, j et tout entier k , on ait $S^k(a_i) = a_j$ si et seulement si $S^k(b_i) = b_j$. Montrer que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se correspondent par va-et-vient.
5. Déduire de la question précédente une description de l'ensemble $S(T)$ des types sur T.