Introduction

Au début des années 80, le problème, jusqu'alors ouvert, de la non finie axiomatisabilité des théories totalement catégoriques, est résolu à la fois par B. Zil'ber [Zil 81] et par G. Cherlin, L. Harrington et A. Lachlan [CHL]. Plus généralement, on a longtemps cru qu'aucune théorie $\aleph_1$-catégorique n'était finiment axiomatisée. Ceci fut réfuté par des constructions de contre-exemples dues à M. Peretyat'kin [Pe 80, Pe 91], puis à E. Baisalov [Ba 91]. Cependant, l'existence d'une théorie fortement minimale finiment axiomatisée reste une question ouverte. D'autre part, les exemples cités précédemment ont tous une géométrie triviale et laissent donc la question suivante ouverte : existe-t-il des théories $\aleph_1$-catégoriques finiment axiomatisées non triviales ? E. Hrushovski [Hr 94] a répondu partiellement à cette question en prouvant qu'une théorie $\aleph_1$-catégorique finiment axiomatisée est nécessairement localement modulaire.

Par ailleurs, la théorie d'un espace vectoriel sur un corps infini, finiment présenté en tant qu'anneau, est évidemment un exemple classique de théorie fortement minimale finiment axiomatisable non triviale. Mais l'existence de tels corps est une question également ouverte. Réciproquement, E. Hrushovski [Hr 94] a conjecturé que le corps des quasi-endomorphismes associé à une théorie $\aleph_1$-catégorique localement projective finiment axiomatisée est finiment présenté en tant qu'anneau.

Pour le cas trivial, il a été conjecturé que l'existence d'une théorie fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'un groupe G infini, de présentation finie et possédant un nombre fini de classes de conjugaisons $C_1, \dots, C_k$ telles que pour tout élément de $g \in G$, il existe $m > 0$ tel que g^m est dans l'un des C_i. La réciproque de cette conjecture est évidente : il suffit de considérer le graphe de Cayley d'un tel groupe G, mais l'existence de ce groupe est aussi une question ouverte.

De nombreuses questions se posent naturellement autour de ces deux conjectures. Certaines de ces questions sont à l'origine de ce travail, même s'il ne porte pas directement sur les questions de finie-axiomatisabilité. Nous appellerons, par la suite conjecture A, la conjecture concernant le cas trivial et conjecture B, la conjecture de E. Hrushovski.

Des résultats d'A. Ivanov [Iv 89, Iv 93] montrent qu'un groupe naturel qui pourrait vérifier les propriétés de la conjecture A est le groupe G des automorphismes d'une composante non algébrique d'une structure fortement minimale à valence bornée finiment axiomatisée. Rappelons qu'une composante non algébrique est $\mathrm{acl}(a) \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ pour un élément a non algébrique, et qu'une structure est à valence bornée si elle a l'élimination des quantificateurs aux formules à valence bornées qui sont les formules du type $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ tel que si $(a_1, \ldots, a_n)$ réalise ϕ alors les éléments $a_1, \ldots, a_n$ sont inter-algébriques. Une structure fortement minimale à valence bornée est donc évidemment triviale.

Notons H le sous-groupe de G qui fixe un point de la composante non algébrique. A. Ivanov a en fait montré que le groupe G satisfait les propriétés voulues si et seulement si le sous-groupe H est fini.

Nous avions déduit des résultats d'A. Ivanov qu'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée est unimodulaire (c'est-à-dire pour tous éléments non algébriques a et b, $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$) (2.6.5). Puis, nous avions remarqué que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une structure fortement minimale à valence bornée finiment axiomatisée, dont le groupe H est infini, et donc, dont le groupe G ne vérifie pas les propriétés de la conjecture A (2.6.7).

Ces résultats ont motivé notre étude des structures fortement minimales à valence bornée, des groupes G et H qui leurs sont associés, et plus généralement, des groupes d'automorphismes de structures fortement minimales triviales.

Nous commençons le **second chapitre** par la caractérisation des structures fortement minimales à valence bornée par leurs groupes d'automorphismes : une structure fortement minimale triviale saturée est à valence bornée si et seulement si le groupe de ses automorphismes qui fixent globalement chacune de ses composantes est le produit des groupes d'automorphismes de chaque composante (2.2.19 et 2.2.20).

L'étude d'un langage "canonique minimal" des structures fortement minimales triviales nous a permis de donner une construction générale de structures fortement minimales à valence bornée (2.2.12), et d'en déduire une seconde construction de structures fortement minimales triviales qui ne sont pas à valence bornée par des enrichissements des structures provenant de la première construction (2.2.17).

Nous présentons des exemples de telles constructions dans la section 2.3.

Dans la section suivante, nous nous intéressons au groupe des automorphismes d'une composante non algébrique. A une structure fortement minimale, nous associons le triplet (G, G', H) : G est le groupe des automorphismes d'une composante non algébrique, G' le sous-groupe des automorphismes forts de cette composante et H le sous-groupe des automorphismes fixant un point de cette composante. Nous donnons une caractérisation des triplets associés aux structures fortement minimales triviales. Un triplet (G, G', H) est associé à une structure fortement minimale triviale si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes : G est localement compact, H est un sous-groupe profini ouvert de G tel que l'ensemble des intersections finies des conjugués de H par G forme un système de voisinages ouverts de 1, et G' est un sous-groupe normal fermé de G tel que $G = G'H$ (2.4.3 et 2.4.4). Remarquons ici que si $G = G'$, la structure fortement minimale ainsi construite est à valence bornée : en effet, une structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement tout automorphisme d'une composante non algébrique est fort (2.2.8).

Nous montrons, de plus, qu'une structure fortement minimale triviale, dont la clôture algébrique du vide est vide, peut être reconstruite à partir de son triplet (G, G', H) (2.4.6).

Ensuite, nous nous intéressons particulièrement au sous-groupe H, fixateur d'un point non algébrique. Ce groupe H est nécessairement un groupe profini. Réciproquement, nous montrons que pour tout groupe profini K, il existe une structure fortement minimale à valence bornée unimodulaire dont le sous-groupe H est homéomorphe à K (2.5.6). Nous utilisons pour cela des extensions HNN de K qui nous permettent d'obtenir des couples (G, H) (c'est-à-dire des triplets (G, G, H)) qui vérifient les conditions précédentes. Dans ces constructions on a donc toujours $G' = G$ et par conséquent on obtient à chaque fois des structures à valence bornée. Dans le cas particulier d'un groupe K profini séparable et commutatif non trivial, nous présentons un autre type de construction d'une structure fortement minimale triviale dont le sous-groupe H est aussi homéomorphe à K, mais qui, elle, n'est pas à valence bornée (2.5.10).

Enfin, nous montrons qu'une structure dénombrable fortement minimale, à valence bornée ou sur un langage fini, a la propriété du petit indice si et seulement si le groupe des automorphismes de la clôture algébrique d'un point non algébrique a cette même propriété du petit indice (2.4.13 et 2.4.14).

Explicitons maintenant la conjecture B. Une structure fortement minimale localement modulaire non trviale est équialgébrique à un groupe minimal localement modulaire $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable, c'est-à-dire minimal 1-basé (Hrushovski [Hr 85]).

De manière générale, E. Hrushovski et A. Pillay [HP 87] ont démontré que la structure induite sur un groupe G 1-basé $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable est une structure abélienne : tout ensemble relativement définissable de G^m est une combinaison booléenne finie de translatés de sous-groupes définissables de G^m.

De plus, Hrushovski [Hr 85] a donné une description de la géométrie pour la classe des groupes minimaux 1-basés $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissables : soient G un groupe minimal $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable et $\mathrm{QsE}(G)$ l'anneau des quasi-endomorphismes de G, c'est-à-dire l'anneau des endomorphismes définissables du groupe G quotienté par sa clôture algébrique du vide G_0, alors $\mathrm{QsE}(G)$ est un corps et si G est localement modulaire (c'est-à-dire 1-basé), la géométrie de G est la même que celle du $\mathrm{QsE}(G)$-espace vectoriel sur G/G_0. Ce théorème détermine donc totalement la géométrie, mais en revanche ne détermine pas complètement la structure induite.

Dans un cas, la structure induite sur le groupe G minimal localement modulaire $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable est relativement simple : si G est d'exposant non borné, le corps $\mathrm{QsE}(G)$ est un corps de fractions de l'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes définissables de G et J. Loveys [Lo 90] a démontré que la structure induite sur G est presque interdéfinissable au-dessus de la clôture algébrique du vide avec la structure de $\mathrm{End}(G)$-module sur G. Nous avons remarqué (1.5.7) que la conjecture B se confronte alors à la question ouverte suivante : existe-t-il des théories de module finiment axiomatisées ?

Dans l'autre cas, lorsque G est d'exposant borné, les rapports entre la structure induite sur G, la structure induite par les quasi-endomorphismes sur G et la structure de $\mathrm{End}(G)$-module sur G s'avèrent extrêmement complexes [HL].

Ceci a en partie motivé notre étude, pour le **troisième chapitre**, des sous-groupes minimaux (c'est-à-dire de rang U un et connexes) $\bigwedge$-définissables du groupe additif d'un corps séparablement clos de degré d'imperfection fini strictement positif, qui sont évidemment des groupes d'exposant borné, et plus particulièrement du rapport entre leurs anneaux d'endomorphismes définissables et leurs corps de quasi-endomorphisnes.

Depuis une dizaine d'années, l'étude des groupes $\bigwedge$-définissables dans des structures de corps est au centre des applications de la théorie des modèles en géométrie. En particulier, certains groupes minimaux $\bigwedge$-définissables dans un corps séparablement clos et la dichotomie entre ceux qui sont localement modulaires et ceux qui ne le sont pas, jouent un rôle central dans la preuve due à E. Hrushovski [Hr 96] de la conjecture de Mordell-Lang en caractéristique finie.

La classe de groupes minimaux considérée par Hrushovski [Hr 96] est la classe des groupes minimaux divisibles. En fait, un groupe minimal $\bigwedge$-définissable, d'un corps L séparablement clos de caractéristique p, est ou bien divisible et dans ce cas de rang de transcendance fini, ou bien d'exposant p, et dans ce cas définissablement isomorphe à un sous-groupe du groupe additif de L et de rang de transcendance arbitraire [BD2]. La classe des groupes minimaux additifs $\bigwedge$-définissables (les sous-groupes minimaux $\bigwedge$-définissables du groupe additif de L) est donc particulièrement riche et contient de nombreuses familles de groupes deux à deux orthogonaux (en, effet deux groupes non orthogonaux ont nécessairement même rang de transcendance).

Notre étude de cette classe a confirmé sa complexité : nous avons montré qu'il existe parmi ceux-ci des groupes localement modulaires pour lesquels le corps des quasi-endomorphismes est infini alors que l'anneau des endomorphismes définissables est fini, ce qui illustre la difficulté de l'étude de la structure induite sur un groupe d'exposant borné (3.5.16).

Remarquons que tous ces groupes "vivent" dans une structure de module. En effet, nous avons montré (section 3.3) que tout sous-groupe G additif connexe $\bigwedge$-définissable dans la structure de corps L est $\bigwedge$-définissable dans la structure L_{mod} de $\mathrm{End}(L,+)$-module sur L (où $\mathrm{End}(L,+)$ est l'anneau des endomorphismes de $(L,+)$ définissables dans la structure de corps L), que tout endomorphisme définissable (respectivement quasi-endomorphisme) de G est la trace d'un endomorphisme (respectivement quasi-endomorphisme) de $(L,+)$, et que si le groupe G est 1-basé, sa structure induite dans la structure de corps L est identique à sa structure induite dans la structure de module L_{mod}.

Nous avons, d'autre part, construit $2^{\aleph_0}$ groupes minimaux additifs G_i deux à deux orthogonaux, qui ont tous un corps fini $\mathrm{QsE}(G_i)$ de quasi-endomorphismes, et dont la structure induite sur G_i est exactement celle d'un $\mathrm{QsE}(G_i)$-espace vectoriel qui est par conséquent $\aleph_0$-catégorique (3.5.20).

Nos constructions précédentes de groupes montrent que la locale modularité d'un sous-groupe minimal additif $\bigwedge$-définissable ne se voit pas sur son anneau d'endomorphismes définissables (3.4.24). En effet, parmi ces constructions, il y a un groupe localement modulaire et un autre non localement modulaire, qui ont tous deux comme anneau d'endomorphismes définissables le corps $\mathbb{F}_p$. En revanche, la locale modularité se voit sur le corps des quasi-endomorphismes (3.5.9).

Nous terminons ce chapitre par une construction de sous-groupes additifs $\bigwedge$-définissables rangés de rang infini (3.6.5). Z. Chatzidakis, G. Cherlin, S. Shelah, G. Srour et C. Wood [CCSSW] avaient donné une construction de types triviaux rangés de rang infini, mais l'existence de groupes $\bigwedge$-définissables rangés de rang infini demeurait une question ouverte.