Convergence exponentielle et hyperbolicité des minimiseurs pour systèmes Lagrangiens aléatoires.

Alexandre Boritchev, Université Lyon 1

Travail (en partie) en collaboration avec Konstantin Khanin (Toronto).

L'équation de Burgers 1D périodique stochastique

$$u_t + uu_x = (\nu u_{xx}) + \eta,\ t \geq 0,\ x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \qquad \text{(1DB)}$$

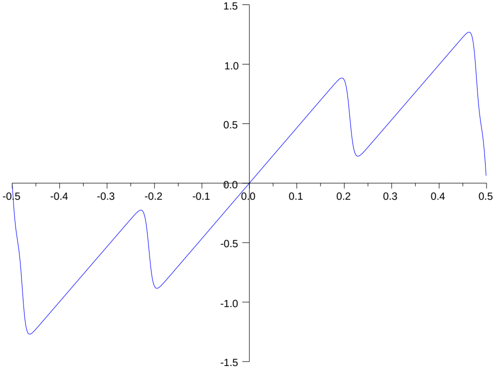
$\eta(t,x) = \eta^\omega(t,x)$: force lisse en espace, aléatoire, de type bruit blanc ou "kicked" en temps.
Condition initiale $u_0 = u(0,\cdot) \in L_1(S^1)$.

On suppose que $\int_{S^1} \eta(t,\cdot) = 0, \forall t$; $\int_{S^1} u(0,\cdot) = 0$. Donc $\int_{S^1} u(t,\cdot) = 0,\ \forall t$.

Modèle naturel pour Navier-Stokes (mais sans pression !) et étudié en tant que tel par des physiciens/numériciens : Burgers, Kida, Kraichnan, Zeldovich, Frisch, Parisi, Gotoh, Polyakov... On pourrait considérer une autre nonlinéarité $f'(u)u_x$ (sous réserve de conditions de convexité/croissance sur f qui rappellent celles de Tonelli).

Chocs après un temps fini.

Profil typique d'une solution de Burgers



Amplitude des solutions ~ 1. Chocs : nombre par période ~ 1, amplitude ~ -1.
Turbulence de Burgers ou "Burgulence" : voir [Bec-Khanin 2007].
Structure de type rampes-falaises $\Rightarrow$ intermittence.

Differents types de forçage

-Force "kicked" :

$$\eta^\omega(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{t=i} \zeta_i^\omega(x),$$

où ζ_i^ω variables aléatoires non triviales lisses i.i.d. dans L_2, à moments finis.

-Force de type bruit blanc : $\eta^\omega(x) = w_t^\omega(x)$, où w^ω est un processus de Wiener en temps à valeurs dans L_2, lisse en espace.

Description variationnelle

En prenant la primitive en x de l'équation de Burgers :

$$u_t + uu_x = \eta,$$

on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi suivante (cas d'un Hamiltonien mécanique) :

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 = -V.$$

La transformée de Legendre de l'Hamiltonien $H(t, x, \phi_x) = \phi_x^2/2 + V$ nous donne :

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V$$

Pour une condition initiale $g(x)$ au temps t_1, on a la description variationnelle suivante des solutions :

$$\phi(t_2, x) = \min_{\gamma(t_2)=x} \left(g(\gamma(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right).$$

qui se généralise bien au cadre aléatoire décrit ci-dessus.

Minimiseurs (I)

Pour une condition initiale $g(x)$ au temps t_1, on a la description variationnelle suivante :

$$\phi(t_2, x) = \min_{\gamma} \Big(g(\gamma(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \Big).$$

Ici, on minimise sur les courbes γ linéaires par morceaux (cas "kicked") ou absolument continues (cas du bruit blanc) telles que $\gamma(t_2) = x$. De telles courbes sont appelées g-minimiseurs.
Lorsqu'on minimise l'action $\int L$ sur un intervalle de temps en fixant les points extrémaux, sans fixer une condition initiale, on parle de minimiseurs.

Minimiseurs (II)

De même, on peut définir respectivement les minimiseurs unilatéraux :

$$\gamma^x : [t, +\infty) \ (ou \ (-\infty, t]) \to S^1$$

(on minimise l'action sur les perturbations à support compact en temps, telles que $\tilde{\gamma}^x(t) = x$) et les minimiseurs globaux :

$$\gamma : (-\infty, +\infty) \to S^1$$

(sans condition initiale : on minimise l'action sur les perturbations à support compact en temps).

Tout g-minimiseur est un minimiseur. Toute restriction d'un minimiseur global sur un intervalle semi-infini est un minimiseur unilatéral. Toute restriction d'un minimiseur unilatéral sur un intervalle fini est un minimiseur.

Cadre déterministe générique

On regarde l'équation avec un forçage déterministe générique. En d'autres termes :

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 = -V(x), \tag{1}$$

avec V lisse et qui admet un maximum unique non dégénéré. On suppose que ce minimum est atteint en $x = 0$ et vaut 0.
En linéarisant au voisinage de $(x, v) = (0, 0)$ et en regardant l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{dx}{dt} = v, \ \frac{dv}{dt} = -V_x,$$

on voit que dans l'espace (x, v) le point $(0, 0)$ est "exponentiellement attractif" dans le sens où un minimiseur sur $[0, T]$ est dans un $exp(-\lambda T/2)$-voisinage de $(0, 0)$ au temps $T/2$.

Convergence exponentielle des minimiseurs

Il existe un seul minimiseur global : la droite $\tilde{\gamma} \equiv 0$. Dans le langage introduit précédemment :

Theorème 1

Il existe des constantes $C, \lambda > 0$ tq pour un minimiseur $\gamma : [s, +\infty) \mapsto S^1$ on ait :

$$|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| = |\gamma(t)| \leq C \exp(-\lambda(t - s)), \ t \geq s.$$

Convergence exponentielle des solutions

Corollaire 1

Soit $\phi : [s, +\infty) \mapsto S^1$ une solution de (1). Alors il existe une constante $\tilde{C} > 0$ et une solution stationnaire $h(\cdot)$ de (1) tq :

$$\max_{x \in S^1} |h(x) - \phi(t,x) - A| \leq \tilde{C} \exp(-\lambda(t-s)), \ \ t \geq s,$$

où la constante A ne dépend que de la condition initiale $\phi(s)$ et λ est le même qu'avant.

Arguments valables aussi bien en 1d qu'en multi-d.

Tous ces résultats sont dus à Iturriaga-Sanchez Morgado et ont lieu dans un cadre plus général.

Dynamique aléatoire

Deux questions :
-Existence-unicité-propriétés de la mesure stationnaire
-Propriétés des minimiseurs (en particulier : existence, unicité et hyperbolicité du minimiseur global).

[Sinai '91] (utilisation de Cole-Hopf) ;
[E-Khanin-Mazel-Sinai '00] (hyperbolicité).
Généralisation multi-d : [Iturriaga-Khanin '03],
[Gomes-Iturriaga-Khanin-Padilla '05].
Dans ces articles il y a des hypothèses supplémentaires que nous verrons plus tard. Ces hypothèses sont capitales pour les propriétés des minimiseurs mais inutiles pour l'existence-unicité de la mesure stationnaire.

Minimiseurs et chocs (I)

Pour $s < t$, il existe une application bien définie qui se comporte bien par composition : $S_s^t : S^1 \to S^1$ ("flot Lagrangien généralisé"). Cette application dépend de la condition initiale en un certain temps fixé $t_0, \; t_0 < s$.

Si l'on a $\gamma(s) = y$ pour un ψ-minimiseur γ sur $[s-1, t]$ tel que $\gamma(x) = t$, alors $S_s^t(y)$ est égal à x.

Si un point y n'est pas atteint par un tel ψ-minimiseur au temps s, alors il appartient à un intervalle fermé correspondant à un choc au temps t. Dans ce cas $S_s^t(y)$ est la position du choc correspondant.

Les minimiseurs sur $[s-1, t]$ ne peuvent s'intersecter qu'aux temps $s-1$ et t. Ainsi S_s^t est bien définie et monotone (i.e. $x < y < z \Rightarrow S_s^t x < S_s^t y < S_s^t z$).

La définition serait problématique dans un cadre multi-d.

Minimiseurs et chocs (II)

Definition 1

Pour une condition initiale fixée $\psi(\cdot, s-1) : S^1 \to \mathbb{R}$, soit $\Omega_{s,t}$ l'ensemble des points atteints, au temps s, par les minimiseurs sur $[s-1, t]$.

On remarque que $\Omega_{s,t}$ est fermé.

Pour un sous-ensemble fermé Z de S^1, le diamètre de Z est défini par :

$$d(Z) = 1 - m(Z),$$

où $m(Z)$ est la longueur maximale d'une composante connexe de $S^1 - Z$.

Autre définition possible : la longueur minimale d'un intervalle fermé de S^1 contenant Z.

Conditions sur les potentiels (I)

Idée : nous voulons avoir assez de liberté pour pouvoir créer, avec probabilité positive, des potentiels petits (automatique dans le cas du bruit blanc) et des potentiels dont l'unique minimimum est atteint en trois points distincts. L'objectif est de prouver la convergence exponentielle des minimiseurs vers le minimiseur global.

Par exemple : un forçage engendré par $(\cos\ 4\pi x,\ \sin\ 4\pi x)$ ne fonctionne pas (periodicité) ; $(\cos\ 2\pi x,\ \sin\ 2\pi x)$ fonctionne.

Conditions sur les potentiels (II)

Conditions 1

Cas "kicked" :

(i) Les impulsions aux moments de temps entiers j sont de la forme

$$F^{\omega}(j) = \sum_{k=1}^{K} c_k^{\omega}(j) F^k,$$

où les F^k sont lisses sur $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les vecteurs $(c_k^{\omega}(j))_{1 \leq k \leq K}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, de moments finis. Leur distribution sur $\mathbb{R}^K$, notée μ, est absolument continue par rapport à $\mu_{Lebesgue}$.

(ii) On a $0 \in Supp\ \mu$.

(iii) L'application $x \mapsto (F^1(x), ..., F^K(x))$ est un plongement (injective et homéomorphisme sur son image).

Conditions sur les potentiels (III)

Conditions 2

Cas du bruit blanc :
(i) Le potentiel est de la forme

$$F^\omega(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \dot{W}_k^\omega(t) F^k(x),$$

où les F^k sont lisses sur S^1 et les $\dot{W}_k^\omega$ sont des bruits blancs indépendants.
(ii) L'application

$$x \mapsto (F^1(x), ..., F^K(x))$$

est un plongement.

Comportement asymptotique des minimiseurs (I)

Ici nous fixons $-\infty < s \leq t < +\infty$ et on suppose que les minimiseurs vérifient les conditions données ci-dessus.

Lemme 1 (EKMS '00, Bor-Khanin '13)

Il existe des constantes $c > 0,\ T > 0$ tq, p.s. :

$$\mathbb{P}(d(\Omega_{s,t+T}) \leq d(\Omega_{s,t})/2 \mid \mathcal{B}_t) \geq c.$$

Theorème 2

Il existe des constantes $C, \lambda > 0$ tq :

$$\mathbb{E}(d(\Omega_{s,t})) \leq \tilde{C} \exp(-\lambda(t-s)).$$

Comportement asymptotique des minimiseurs (II)

Corollaire 2

Fixons $s \in \mathbb{R}$. Alors, ω-p.s., il existe une variable aléatoire à moments finis $\tilde{C} > 0$ tq :

$$d(\Omega_{s,t}) \leq \tilde{C} \exp(-\lambda(t-s)/2), \quad t \geq s.$$

Corollaire 3

Fixons $s \in \mathbb{R}$. Alors, ω-p.s., il existe une variable aléatoire à moments finis $\tilde{C} > 0$ tq pour tout minimiseur unilatéral γ sur $[s, +\infty)$:

$$|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \leq \tilde{C}(s,\omega) \exp(-\lambda(t-s)/2), \quad t \geq s,$$

où $\tilde{\gamma}$ dénote l'unique minimiseur global.

Idée de la preuve : Prendre la solution stationnaire et passer à la limite $t \to +\infty$.

Remarques

Hyperbolicité : Par la théorie de Pesin, le Corollaire 2 implique l'hyperbolicité du minimiseur global pour la dynamique d'Euler-Lagrange dans l'espace des phases (x, u, t).

Multi-d : existence d'un minimiseur global unique ; son hyperbolicité [Khanin-Zhang]. Par contre on n'a pas a priori de "contraction exponentielle" des minimiseurs et la structure des chocs est mal comprise.

Cadre non compact : Hoang-Khanin '03 : Forçage avec un minimum bien localisé ; Bakhtin-Cator-Khanin '13 : processus de Poisson en espace-temps. Minimiseurs coalescents exponentiellement.

Mesure stationnaire

Sauf indication du contraire, les arguments ont lieu uniformément par rapport au coefficient de viscosité $\nu \geq 0$ (i.e. pour l'équation de Burgers stochastiqe avec éventuellement le terme visqueux νu_{xx}) et sur le tore $\mathbb{T}^d,\ d \geq 1$.

Les solutions u de l'équation de Burgers stochastique définissent un processus de Markov dans $L_1(S^1)$. On a des estimations supérieures uniformes en ν [Bor12, Bor13] : l'argument de Bogolyubov-Krylov implique l'existence d'une mesure stationnaire.

Vitesse de convergence

Le semigroupe G_t^ω correspondant au processus de Markov est contractant dans L_1 :

$$|G_t^\omega u_0 - G_t^\omega \tilde{u}_0|_1 \leq |u_0 - \tilde{u}_0|_1.$$

On a donc, par un argument de couplage trivial (cf. [Kuksin-Shirikyan '12]) unicité de la mesure stationnaire et un taux de convergence algébrique vers celle-ci.
Idée : la distance entre les solutions devient petite car les solutions elles-mêmes deviennent petites lorsque la force est petite pendant longtemps, puis cette distance n'augmente pas.

Pas besoin d'une condition de non-dégénérescence (résultat vrai même si pas de force !) Par contre la condition $0 \in Supp$ nécessaire.

Arguments analogues sans estimation de la vitesse de convergence : [Gomes-Iturriaga-Khanin-Padilla '05].

Convergence exponentielle

Dans le cas $\nu = 0$ et $d = 1$ on a mieux : une convergence exponentielle vers la mesure stationnaire [Bor '16].
Idée : considérons la position des minimiseurs pour 2 C.I. différentes sur $[0, T]$ au temps $T/2$. Ils sont localisés dans deux ensembles exp. petits (les ensembles Ω) qui sont exp. proches entre eux (par les propriétés des minimiseurs unilatéraux).

Ici, besoin des conditions 1 ou 2 sur le forçage.

Perspectives

Prouver que sous les hypothèses 1 ou 2, la convergence est exponentielle (uniformément en ν). Se débarasser de ces conditions ? Etudier le cas multi-d.

Point de vue spectral :
Par la transformation de Cole-Hopf on peut se réduire à un problème spectral pour l'opérateur

$$-\nu\Delta + \nu^{-1}V$$

dans la limite $\nu \Rightarrow 0$ et il faut ensuite faire la transformée de Cole-Hopf inverse.

Problème : Spectre bien compris, plus délicat d'étudier les propriétés fines des fonctions propres lorsqu'on prend le log.

Bibliographie

A. Boritchev, K. Khanin, *On the hyperbolicity of minimizers for 1D random Lagrangian systems*, Nonlinearity 26 (2013), 65-80.

A. Boritchev, *Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation*, GAFA 23 (2013), 6, 1730-1771

A. Boritchev, *Multidimensional potential Burgers turbulence*, CMP (2015)

A. Boritchev, *Exponential convergence to the equilibrium for a class of 1D Lagrangian systems with random forcing*, arXiv :1601.01937

Weinan E, K. Khanin, A. Mazel, Ya. Sinai, *Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing*, Annals of Mathematics 151 (2000), 877-960.

R. Iturriaga, H. Sánchez-Morgado, *Hyperbolicity and exponential convergence for the Lax-Oleinik semigroup* JDE 246 (5) 2009, 1744-1753.