

# Turbulence de Burgers en 1D : un cas modèle pour la théorie de Kolmogorov

Alexandre Boritchev, INRIA IPSO et ENS Ker Lann

6 mai 2013

# Résumé

La théorie de Kolmogorov et l'intermittence

"Burgulence" 1D : prédictions physiques

"Burgulence" 1D : résultats analytiques

# Les équations de Navier-Stokes incompressibles en 3D

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \eta; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (\text{NSE})$$

On doit préciser des conditions limites.

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ vitesse	$\nu > 0$ coefficient de viscosité constant
$p(t, \mathbf{x})$ pression	$(\nu \ll 1)$
	$\eta(t, \mathbf{x})$ force aléatoire, lisse en la variable $\mathbf{x}$

Il s'agit d'étudier le comportement statistique de  $\mathbf{u}$  lorsque  $\nu$  varie, tous les autres paramètres étant fixés.

## Echelles

Dans l'espace de Fourier, une **échelle** est, grossièrement, l'inverse de la fréquence considérée. **Dans cet exposé, nous ne considérons que des échelles spatiales, et non des échelles temporelles.**

Par exemple, dans le cas périodique, **les quantités à petite échelle** sont des quantités du même type que les coefficients de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}}$  pour  $\mathbf{k}$  grand.

Dans l'étude de la turbulence, on dit aussi que des quantités dans l'espace physique du type  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{r}$  petit sont à petite échelle.

## La théorie K41

Le comportement à petite échelle d'un champ de vitesses pour un fluide turbulent est un très vieux problème (années 1930- : Taylor, Onsager, Heisenberg, von Weizsäcker, Batchelor...)

3 articles de Kolmogorov (1941). Diverses hypothèses physiques (cf [Frisch 1995], [Tsinober 2001]), dont le fait d'avoir un régime stationnaire en temps.

Nous nous bornerons au cas d'un fluide périodique en espace.

## Notations

$X \stackrel{a}{\sim} Y$  : Il existe  $C > 0$  telle que  $C^{-1}X \leq Y \leq CX$ .  
 $C$  ne dépend que du paramètre  $a$ .  $a$  n'est **jamais** la viscosité  $\nu$ . Les notations  $\stackrel{a}{\gtrsim}$  et  $\stackrel{a}{\lesssim}$  sont définies de façon analogue.

$\langle \dots \rangle$  : Espérance (lorsqu'on considère une force aléatoire).

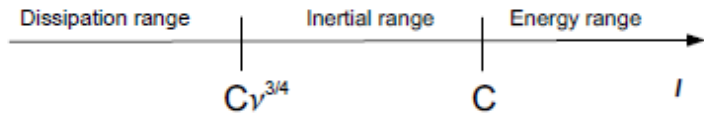
## La théorie K41 : les zones.

L'**échelle dissipative**  $\ell_d$  est l'échelle telle que, pour  $\|\mathbf{k}\| \gtrsim \ell_d^{-1}$ , les coefficients de Fourier d'une fonction  $\mathbf{u}$  décroissent très vite, uniformément en  $\nu$ . On dit que  $\mathbb{I}_{diss} = [0, \ell_d]$  est la **zone dissipative**. Pour K41,  $\ell_d = C\nu^{3/4}$ .

La **zone énergétique**  $\mathbb{I}_{energ} = [\ell_e, 1]$  est l'ensemble d'échelles telles que les modes de Fourier correspondants contiennent la plus grande partie de la norme  $L^2$  de  $\mathbf{u}$  :

$$\sum_{\|\mathbf{k}\| \leq \ell_e^{-1}} \langle |\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}}|^2 \rangle \gg \sum_{\|\mathbf{k}\| > \ell_e^{-1}} \langle |\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}}|^2 \rangle. \text{ Pour K41, } \ell_e = C.$$

$\mathbb{I}_{inert} = [\ell_d, \ell_e]$  est la **zone inertielle**. Pour K41,  $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu^{3/4}, C]$ .



## La théorie K41 : résultats dans l'espace physique

On commence par considérer les moments de l'**incrément longitudinal** :

$$S^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Le  $p$ -ème moment de  $S^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  est appelé **fonction de structure d'ordre  $p$**  :

$$S_p^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \left\langle \left| \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right|^p \right\rangle.$$

Pour  $\mathbf{r}$ ,  $\|\mathbf{r}\| = \ell \in \mathbb{I}_{inert}$ ,  $p \geq 0$ , on a

$$S_p^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \stackrel{p}{\sim} \ell^{p/3}.$$



## La théorie K41 : résultats dans l'espace de Fourier

Soit  $E(k)$  la moyenne de  $\langle \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}}|^2 \rangle$  sur l'ensemble des  $\mathbf{n}$  tels que  $\|\mathbf{n}\| \in [C^{-1}k, Ck]$ .

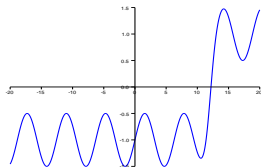
Pour  $k$  tel que  $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$ , le **spectre d'énergie**  $E(k)$  vérifie :

$$E(k) \sim k^{-5/3}.$$

(Obukhov 1941)

## Intermittence et corrections à K41

Les prédictions de K41 sont en accord avec les expériences/simulations pour  $S_p^{\parallel}$ ,  $p \leq 3$  et pour le spectre d'énergie. Cependant, ceci n'est pas le cas pour  $S_p^{\parallel}$ ,  $p \geq 4$ . Des théories apportant des corrections à K41 ([Kolmogorov 1962], [Frisch, Parisi 1985]) expliquent cela par l'**intermittence** spatiale.



Ce type d'intermittence peut être quantifié par le **facteur d'aplatissement**  $F(\ell) = S_4^{\parallel}(\ell)/S_2^{\parallel}(\ell)^2$  : la fonction est d'autant plus intermittente que  $F$  est grand.

## Equation de Burgers périodique stochastique 1D

$$u_t + f'(u)u_x = \nu u_{xx} + \eta, \quad t \geq 0, \quad x \in S^1. \quad (1DB)$$

$f$  lisse, strictement convexe, de croissance modérée.

$\nu > 0$ ,  $\nu \ll 1$ .

$\eta(t, x)$  : force lisse en espace, de type "bruit blanc" en temps.

$\eta = w_t$ , où  $w$  processus de Wiener lisse en espace.

Condition initiale  $u(0, x) \in L_1$ .

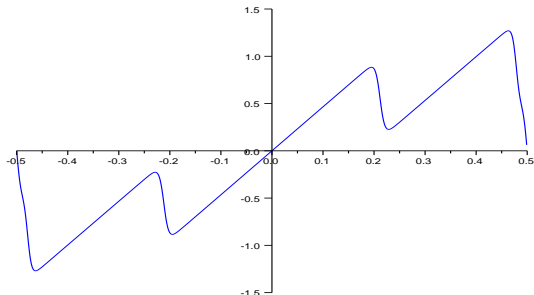
$\int_{S^1} \eta(t, \cdot) = 0$ ;  $\int_{S^1} u(0, \cdot) = 0$ . Donc  $\int_{S^1} u(t, \cdot) = 0$ ,  $\forall t$ .

Nous nous limiterons au cas  $f(u) = u^2/2$ . Même type de non-linéarité et de dissipation que (NSE); pas de pression. Modèle naturel pour (NSE). Étudié par de nombreux physiciens : Burgers, Kida, Kraichnan, Zeldovich, Frisch, Parisi, Gotoh, Polyakov...

Chocs après un temps fini pour  $\nu = 0$ . Lorsque  $\nu > 0$ , la solution devient lisse instantanément. Chocs  $\Rightarrow$  "falaises" (cliffs).

Encore une fois, **seule la valeur de  $\nu$  change** : nous fixons  $\eta$  et  $u_0$ .

## Profil typique d'une solution de (1DB)



Amplitude de la solution  $\sim 1$ . "Falaises" (cliffs) : nombre de falaises  $\sim 1$ , dénivelé  $\sim -1$ , largeur  $\sim \nu$ .

Cf. l'article de synthèse [Bec-Khanin 2007]. L'équation de Burgers stochastique a un comportement turbulent : on parle de "Burgulence". Structure "rampes-falaises" ("ramp-cliff")  $\Rightarrow$  intermittence.

## Prédictions pour (1DB)

Prédictions physiques pour les échelles spatiales, les incréments, le facteur d'aplatissement, le spectre d'énergie.

Cas sans force, avec données initiales aléatoires ([Kraichnan 1968], [Kida 1979], [Aurell-Frisch-Lutsko-Vergassola 1992]).

Les arguments s'adaptent bien au cas d'une force lisse en espace.

Cas avec force : [E-Khanin-Mazel-Sinai 1997] (mesure stationnaire pour  $\nu = 0$ ), [Kraichnan-Gotoh 1998].

Pas de démonstrations rigoureuses dans le cadre qui nous intéresse ( $\nu > 0$ , évolution en temps fini, force de type bruit blanc en temps lisse en espace).

## Prédictions pour (1DB) : échelles spatiales

**Echelle dissipative** (l'échelle  $\ell_d$  telle que le spectre d'énergie décroît très vite pour les modes de Fourier correspondant à  $|k| \succeq \ell_d^{-1}$ ) :

$C\nu$ .

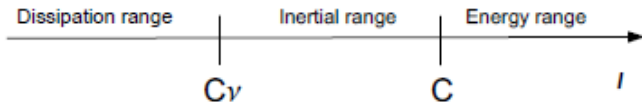
K41 :  $C\nu^{3/4}$ .

**Zone énergétique** (correspondant aux modes de Fourier contenant la plus grande partie de la norme  $L^2$ ) :  $\mathbb{I}_{energ} = [C, 1]$ .

K41 :  $[C, 1]$ .

**Zone inertielle** :  $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu, C]$ .

K41 :  $[C\nu^{3/4}, C]$ .



## Prédictions pour (1DB) dans l'espace physique

Les **fonctions de structure**, c-à-d les moments des incréments :

Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , soit

$$S_p(\ell) = \left\langle \int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^p dx \right\rangle.$$

On a alors

$$S_p(\ell) \stackrel{p}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{K41} : S_p(\ell) \stackrel{p}{\sim} \ell^{p/3}, \forall p.$$

**Coefficient d'aplatissement** : Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , soit

$F(\ell) = S_4(\ell)/S_2(\ell)^2$ . On a

$$F(\ell) \sim \ell^{-1}.$$

$$\text{K41} : F(\ell) \sim 1.$$

# Prédictions pour (1DB) dans l'espace physique : arguments de [AFLV]

Aurell-Frisch-Lutsko-Vergassola remarquent qu'on a 3 possibilités pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ . En effet,  $\ell$  est au moins du même ordre que la largeur d'une "falaise" et au plus du même ordre que la largeur d'une "rampe".

- $[x, x + \ell]$  coupe une grande partie d'une "falaise".

Probabilité  $\simeq Cl$ .  $|u(x + \ell) - u(x)|^p \stackrel{P}{\sim} 1$ .

- $[x, x + \ell]$  coupe une petite partie d'une "falaise"

Contribution négligeable.

- $[x, x + \ell]$  ne coupe pas une "falaise".

Probabilité  $\simeq 1 - Cl$ .  $|u(x + \ell) - u(x)|^p \stackrel{P}{\sim} \ell^p$ .

Ainsi,  $S_p(\ell) \stackrel{P}{\sim} \ell + \ell^p$ . On a bien  $S_p(\ell) \stackrel{P}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$



## Prédictions pour (1DB) dans l'espace de Fourier

**Spectre d'énergie** : Soit  $E(k)$  la moyenne de  $\langle \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}^n|^2 \rangle$  sur l'ensemble des  $n$  tels que  $|n| \in [C^{-1}k, Ck]$ . Alors, pour  $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$  :

$$E(k) \sim k^{-2}.$$

$$\text{K41} : E(k) \sim k^{-5/3}.$$

## Estimations pour les normes de la solution : préliminaires

Dans [Bor2], nous obtenons des bornes supérieures et inférieures optimales pour les normes de Sobolev  $W^{m,p}$  de la solution de (1DB). Ces bornes sont uniformes par rapport à la condition initiale  $u(0, \cdot)$ . Elles coïncident à un facteur multiplicatif (indépendant de  $\nu$ ) près.

Notations :

$|\cdot|_{m,p}$  : norme de Sobolev dans  $W^{m,p}(S^1)$ .

$\langle \dots \rangle$  : espérance (pour un temps donné).

$\{ \dots \}$  : espérance de la moyenne en temps sur  $[t, t + T_0]$ , où  $t \geq T_0$ , et  $T_0$  est une constante.

# Estimations pour les normes de la solution

## Theorème 1

$$\{|u|_p^n\} \stackrel{n}{\sim} 1, \forall n \geq 0, p \in [1, +\infty].$$

## Theorème 2

$$\{(\max_{S^1} u_x^+)^n\} \stackrel{n}{\sim} 1, \{(\max_{S^1} u_x^-)^n\} \stackrel{n}{\sim} \nu^{-n}, \forall n \geq 0.$$

## Theorème 3

$$\{|u|_{m,\infty}^n\} \stackrel{m,n}{\sim} \nu^{-mn}, \forall m \geq 1, n \geq 0.$$

Les bornes supérieures sont obtenues en utilisant des méthodes stochastiques et le principe du maximum de Kruzhkov. Elles restent vraies lorsqu'on remplace la moyenne en temps par un maximum sur un intervalle de temps.

Les bornes inférieures sont obtenues en utilisant des méthodes stochastiques.

## Que nous disent ces estimations ?

$$\{|u|_p^n\} \sim 1, \forall n \geq 0, p \in [1, +\infty].$$

$\Rightarrow$  amplitude de  $u \sim 1$ .

$$\{(\max_{S^1} u_x^+)^n\} \sim 1, \{(\max_{S^1} u_x^-)^n\} \sim \nu^{-n}, \forall n \geq 0.$$

$\Rightarrow$  partie positive de  $u_x \sim 1$  ; partie négative de  $u_x \sim \nu^{-1}$ .

$$\{|u|_{m,\infty}^n\} \sim \nu^{-mn}, \forall m \geq 1, n \geq 0.$$

$\Rightarrow u(x)$  se comporte "comme  $g(x\nu^{-1})$ ".

**Problème** : partie positive de  $u_x$ . Il faut donc travailler plus (incréments...)

## Principe du maximum de Kruzhkov (I)

Considérons (1DB) **sans force** sur  $S = (t, x) \in [T, T + 1] \times S^1$  :

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}.$$

Dérivons-la en espace. Regardons un point où  $u_x$  atteindrait son maximum tel que  $t > T$  (on suppose que  $u \neq 0$ , donc ce maximum est str. positif) :

$$\underbrace{(u_x)_t}_{\geq 0} + \underbrace{(u_x)^2}_{>0} + u \underbrace{u_{xx}}_0 = \nu \underbrace{(u_x)_{xx}}_{\leq 0}.$$

Contradiction  $\Rightarrow u_x$  vérifie le principe du maximum (mais non du minimum). Présence de  $(u_x)_t + (u_x)^2 \Rightarrow$  **comportement en  $t^{-1}$  ?**  
On considère donc  $v = (t - T)u_x$ .  $v$  ne peut atteindre un maximum str. positif que pour  $t > T$ . En ce point on aurait :

$$\underbrace{v_t}_{\geq 0} + u \underbrace{v_x}_0 + (t - T)^{-1}(-v + v^2) = \nu \underbrace{v_{xx}}_{\leq 0}.$$

Ainsi  $v \leq 1$  sur  $S$ . Donc  $u_x \leq (t - T)^{-1} \Rightarrow$  "amortissement".

## Principe du maximum de Kruzhkov (II)

Cette méthode a été utilisée dans un article de Kruzhkov (1964). On peut l'adapter au cas du bruit blanc. On obtient que, pour  $T \geq 1$  :

$$\max_{s \in [T, T+1], x \in S^1} u_x(s, x) \leq C \left( \max_{s \in [T-1, T+1]} |w(s)|_{C^3} + 1 \right), \quad (1)$$

où  $w$  est le processus de Wiener dont  $\eta$  est la dérivée en temps (on fixe  $w(T-1) = 0$ .) Comme tous les moments d'un processus de Wiener sont finis, il en est de même pour le maximum de  $u_x$ . La méthode marche aussi pour les nonlinéarités de type  $f'(u)u_x$ , où  $f'(u) \leq C(|u|^{2-\delta} + 1)$ ,  $\delta > 0 \Rightarrow$  conditions sur  $f$ .

## Mesure stationnaire

Les solutions  $u$  définissent un processus de Markov dans  $L_1(S^1)$ . Le semigroupe de Markov correspondant  $S_t$  est contractant :

$$|S_t u_0 - S_t \tilde{u}_0|_1 \leq |u_0 - \tilde{u}_0|_1.$$

Les Théorèmes 1-3 impliquent, par l'argument de Bogolyubov-Krylov, l'existence d'une mesure stationnaire. Son unicité s'obtient à partir d'estimations de type (1).

## Obtention d'une borne inférieure

Par la formule d'Itô on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S^1} u^2 &= -2 \underbrace{\int_{S^1} u f'(u) u_x}_{0} + 2\nu \int_{S^1} u u_{xx} + \text{integrale stochastique} + C \\ &= -2\nu \int_{S^1} u_x^2 + \text{integrale stochastique} + C. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en intégrant en temps on obtient que :

$$\langle |u(t + T_0)|_2^2 \rangle - \langle |u(t)|_2^2 \rangle = -2\nu T_0 \{ |u|_{1,2}^2 \} + C T_0.$$

Par le principe du maximum de Kruzhkov, pour  $t \geq 1$  on a :

$$\langle |u(t + T_0)|_2^2 \rangle \leq \langle (\max_x u_x(t + T_0, x))^2 \rangle \leq C.$$

Donc pour  $T_0$  assez grand :

$$\{ |u|_{1,2}^2 \} \geq \frac{C T_0 - C}{2 T_0} \nu^{-1} \geq C \nu^{-1}.$$



## Notations

$S_p(\ell) : \left\{ \int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^p dx \right\}, p \geq 0.$

$E(k) : \text{moyenne de } \left\{ \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}^n|^2 \right\} \text{ sur les } n \text{ tels que } |n| \in [C^{-1}k, Ck], \text{ où } C > 0 \text{ est une constante.}$

## Résultats principaux : échelles spatiales

D'après les Théorèmes 1-3, on obtient les résultats suivants, qui confirment les prédictions physiques. Toutes les définitions sont changées, de manière à intégrer la moyenne en temps, et non seulement l'espérance.

### Theorème 4

*Pour une solution de (1DB), l'échelle dissipative  $\ell_d$  vaut  $C\nu$  et  $\mathbb{I}_{energ} = [C, 1]$ .*

*Donc  $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu, C]$ .*

# Résultats principaux dans l'espace physique

## Theorème 5

Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , les fonctions de structure vérifient :

$$S_p(\ell) \stackrel{p}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$$

## Corollaire 1

Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , le coefficient d'aplatissement vérifie :

$$F(\ell) \sim \ell^{-1}.$$

## Résultats principaux dans l'espace physique : démonstration (I)

Les bornes supérieures découlent immédiatement des Théorèmes 1-3 en utilisant l'inégalité de Hölder.

Les bornes inférieures du Théorème 5 sont dues au fait que, avec une probabilité  $\geq C_1$  les solutions sont "typiques" pendant un temps  $\geq C_2$  sur  $[t, t + T_0]$ . Les constantes  $C_1, C_2 > 0$  sont indépendantes de  $\nu$ .

En d'autres mots, leurs normes de Sobolev vérifient les estimées des Théorèmes 1-3 (sans espérance ni moyenne en temps).

## Résultats principaux dans l'espace physique : démonstration (II)

Soit une solution "typique" considérée en un temps "typique".  
Comme  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ ,  $\ell$  est au moins du même ordre que la largeur  
d'une région où  $-u_x$  est grand ("falaise").

Alors, la probabilité que  $[x, x + \ell]$  coupe une grande partie d'une  
"falaise" vaut au moins  $C\ell$ .

On a alors  $|u(x + \ell) - u(x)|^p \stackrel{P}{\sim} 1$ . Ainsi, pour  $p \geq 1$ ,  $S_p(\ell) \stackrel{P}{\gtrsim} \ell$ .

Pour  $p < 1$ , il faut travailler davantage (inégalité de Hölder). On  
ne peut pas s'appuyer sur l'intuition géométrique. En effet, la  
contribution dominante vient alors des "rampes", et on n'a pas  
assez d'information sur leur structure.

## Résultats principaux dans l'espace de Fourier

### Theorème 6

Pour  $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$ , le spectre d'énergie vérifie :

$$E(k) \sim k^{-2}.$$

Idee de la preuve : On regarde les coefficients de Fourier de  $u(x + \ell) - u(x)$ . **Formule de Wiener-Khinchin :**

$$\int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^2 dx = 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2(\pi n \ell) |\hat{u}^n|^2.$$

Pour (1DB), on a une loi d'échelle de type K41.

## Généralisations

On a les mêmes résultats pour une "kicked force" car on a les mêmes estimations pour les normes de Sobolev (cf. [Bor1]).

On a aussi des résultats très similaires (sous les conditions  $|u(0, \cdot)|_1, |u(0, \cdot)|_{1,\infty} \sim 1$ ) pour le cas de Burgers sans force (cf. [Biryuk 2001, Bor3]).

J'espère que des résultats très similaires peuvent être prouvés dans le cas multidimensionnel lorsque  $u$  est un potentiel :

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} + \eta_t; \quad \mathbf{u} = -\nabla \phi.$$

## Conclusion

Nous avons obtenu des résultats exacts et rigoureux pour la turbulence de Burgers à petite échelle. Ces résultats confirment les prédictions physiques sous des hypothèses très générales pour la donnée initiale et raisonnables pour la force. Les estimations des quantités à petite échelle ont également lieu pour les solutions de l'équation inviscide, ainsi que pour la solution stationnaire à  $\nu > 0$ .

On utilise des méthodes d'EDP et d'EDP stochastiques. Cela nous permet de confirmer l'intuition géométrique et de quantifier l'échelle dissipative et l'intermittence pour (1DB).

On espère que ces méthodes peuvent être généralisées à d'autres équations admettant un principe du maximum aussi fort.



## Bibliographie

E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsko, M. Vergassola, *On the Multifractal Properties of the Energy Dissipation Derived from Turbulence Data*, Journal of Fluid Mechanics 238, 1992, 467-486.

A. Biryuk, *Spectral Properties of Solutions of the Burgers Equation with Small Dissipation*, Functional Analysis and its Applications, 35 :1 (2001), 1-12.

[Bor1] : A. Boritchev, *Estimates for Solutions of a Low-Viscosity Kick-Forced Generalised Burgers Equation*, Prépublication (à paraître dans Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A), arXiv :1107.4866v1.

[Bor2] : A. Boritchev, *Sharp Estimates for Turbulence in White-Forced Generalised Burgers Equation*, Prépublication, arxiv :1201.5567.

[Bor3] : A. Boritchev, *Note on Decaying Turbulence in a Generalised Burgers Equation*, Prépublication, arXiv :1208.5241.