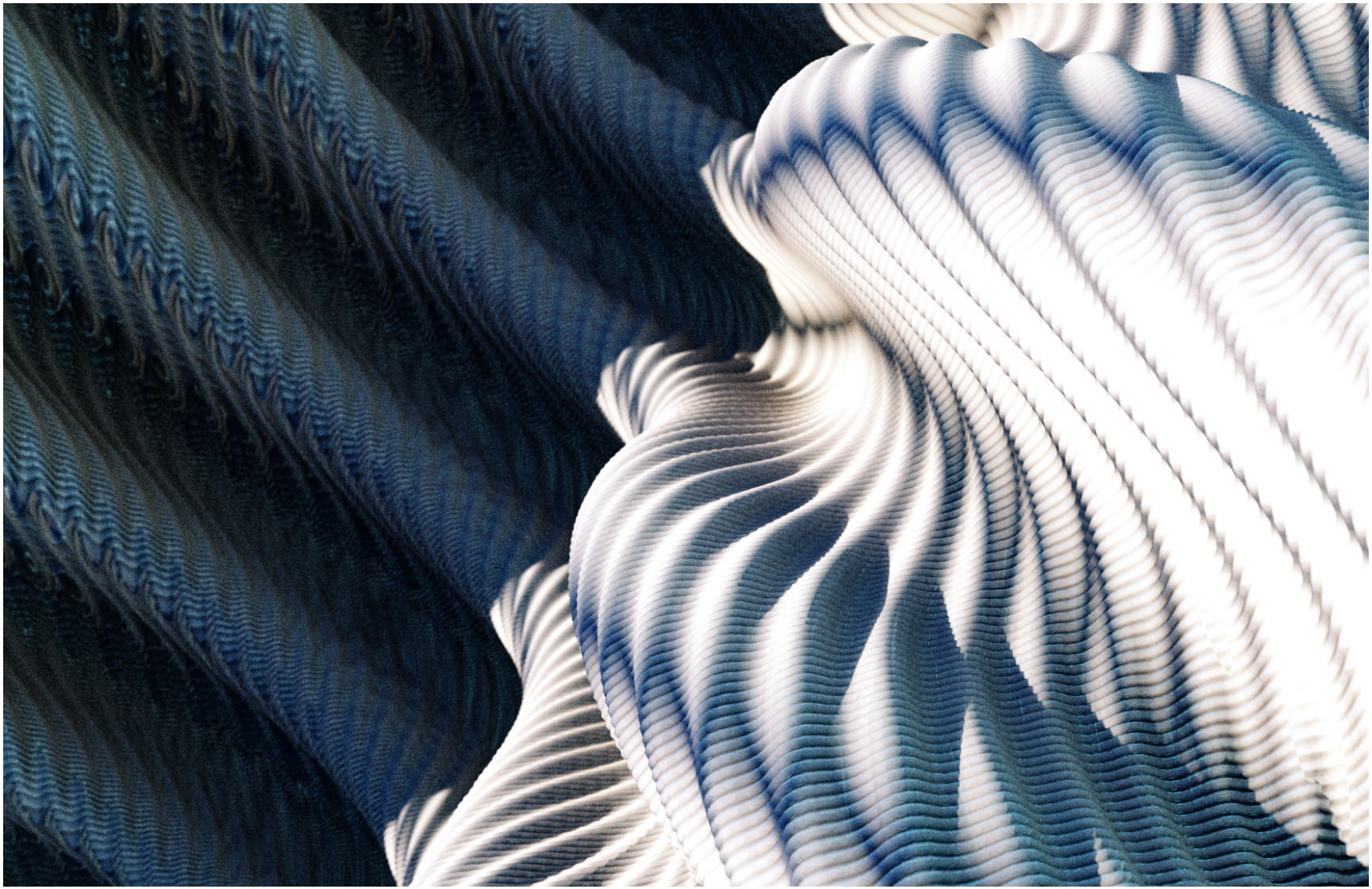
CM 4 :Plongements isométriques C^1

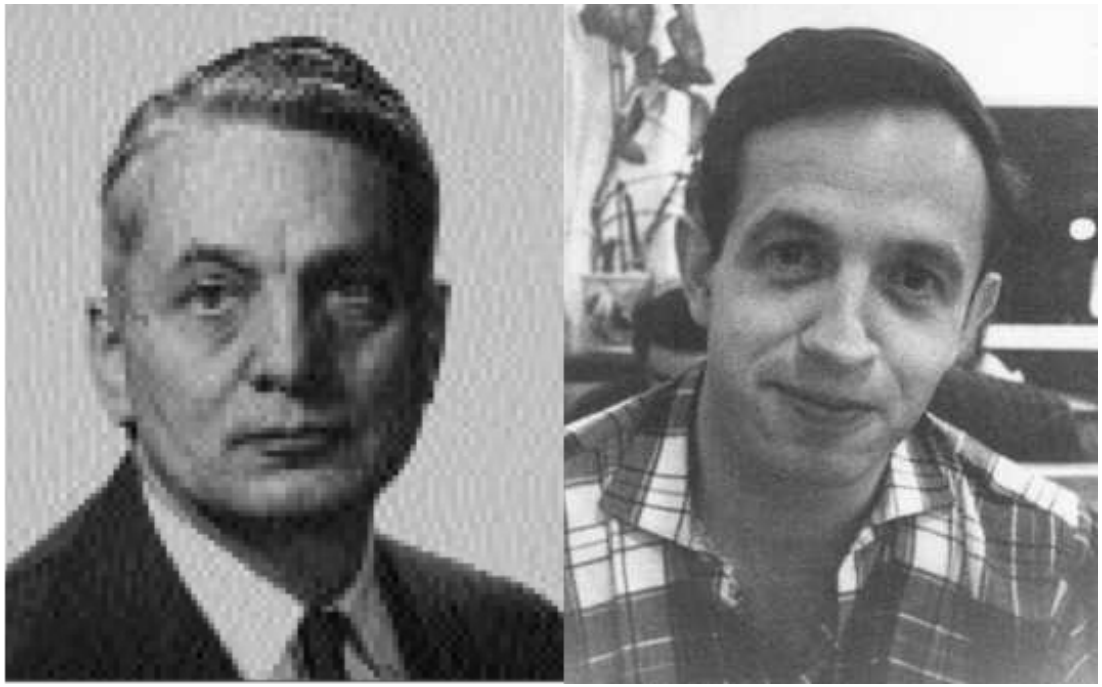


John Nash

Source : The American Experience - A Brilliant Madness

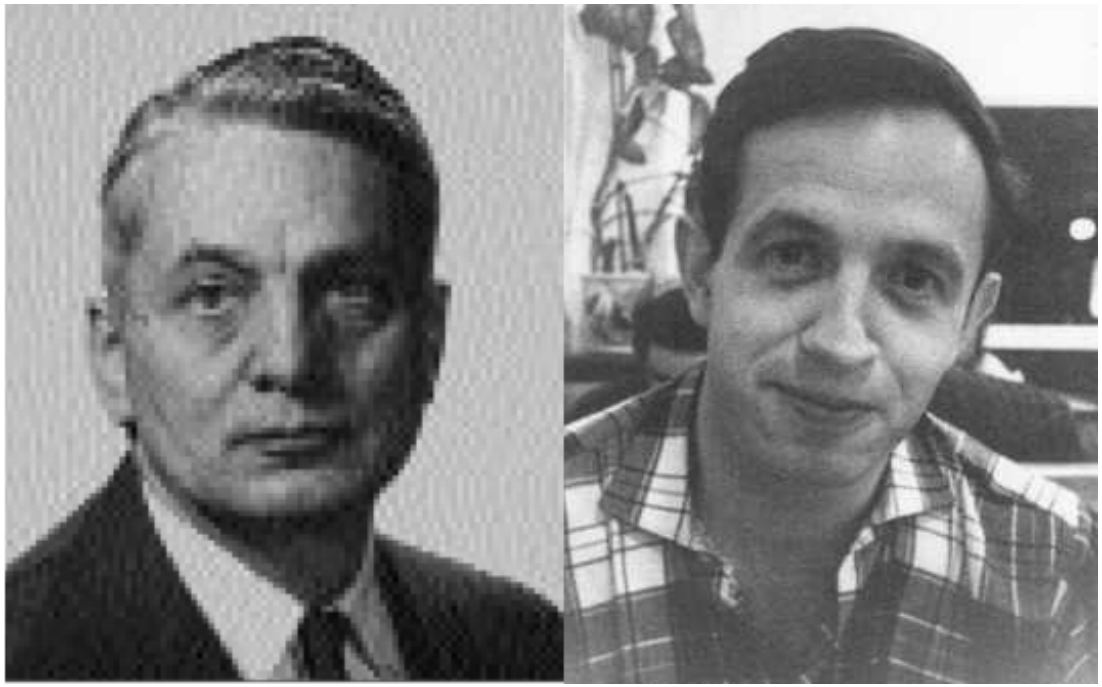
Massachusetts Institute of Technology, 1953

Warren Ambrose *vs* John Nash



Images : Notices of the AMS et Jay Goldman

Warren Ambrose *vs* John Nash



Images : Notices of the AMS et Jay Goldman

« *Gnash, si tu es si bon, pourquoi ne résous-tu pas le problème du plongement isométrique des variétés riemanniennes ?* »

Le problème du plongement isométrique

Bernhard Riemann

C'est un problème difficile qui résistait depuis Riemann (1854) car la condition de préservation des longueurs s'exprime au moyen d'un système d'**EDP non linéaires** qu'on ne sait pas résoudre en général.

Un défi diabolique

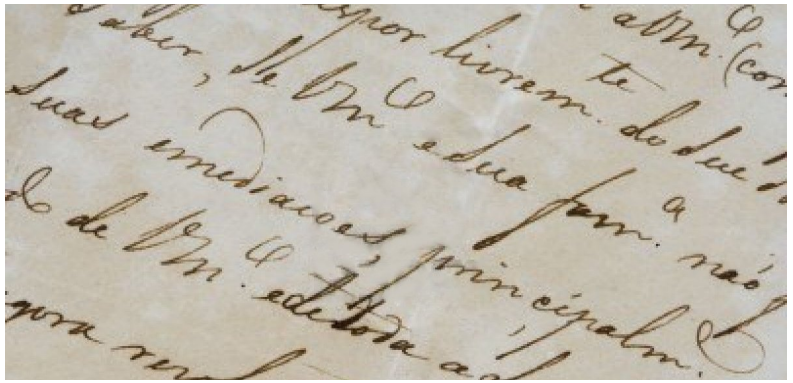
« *Bon courage Gnash !* »

Warren Ambrose

Booster Gold

« *Ce sera fait dans une semaine !* » John Nash

Pluie de louanges

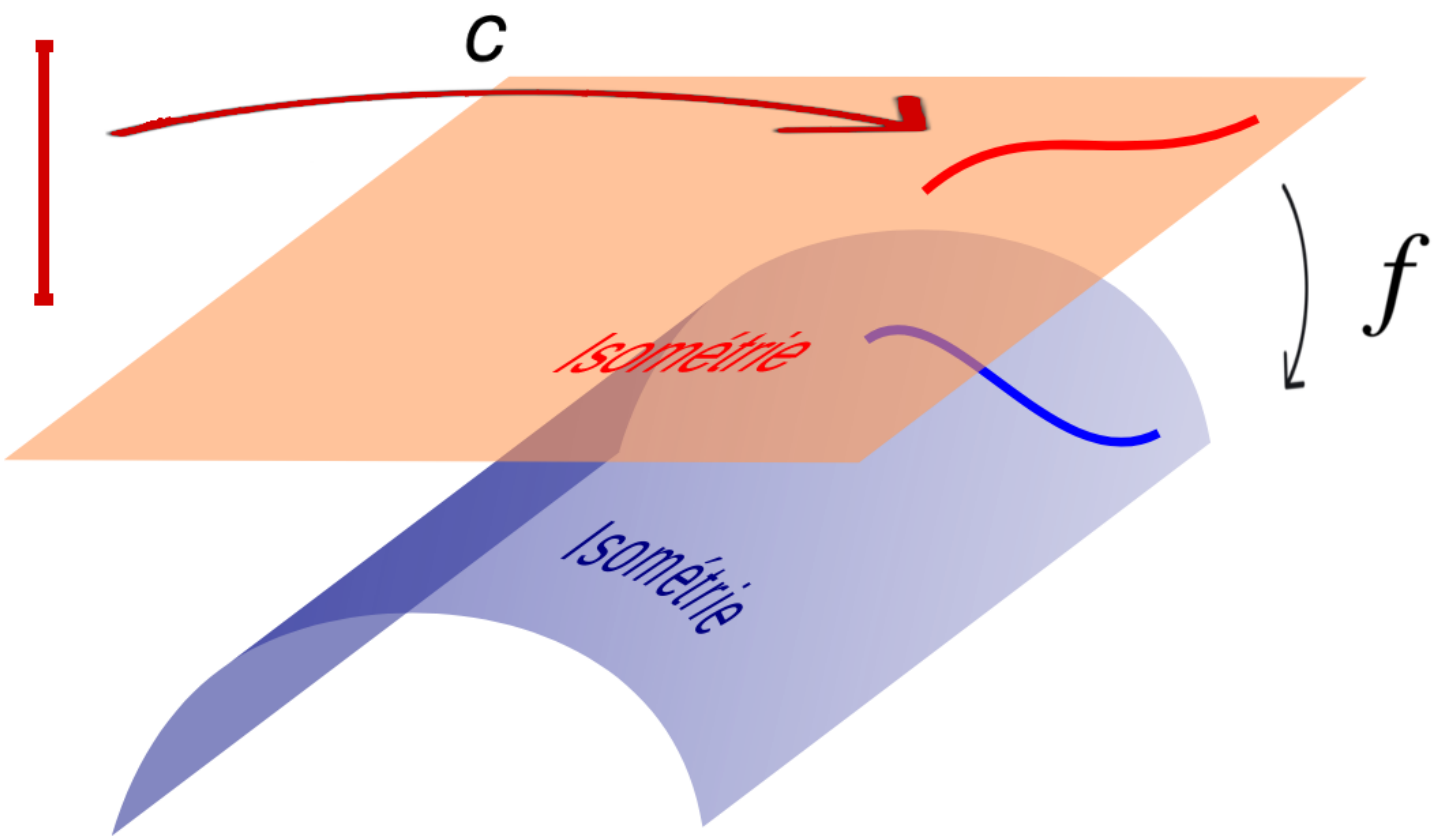


« [Nash] se couvre de ridicule de multiples façons [...] Il s'est mis à proclamer qu'il avait résolu le problème du plongement isométrique [...] mais Nash n'avait que des notions les plus vagues sur toute l'affaire »

« Tout le monde admet qu'il n'aboutira à rien [...] Nous l'avons sur les bras ce qui nous prive d'avoir un véritable mathématicien. Il est brillant mais vaniteux comme un paon [...] aussi emporté que X et aussi râleur que Y quels que soient X et Y. »

Lettre de Warren Ambrose à Paul Halmos

Plongements isométriques

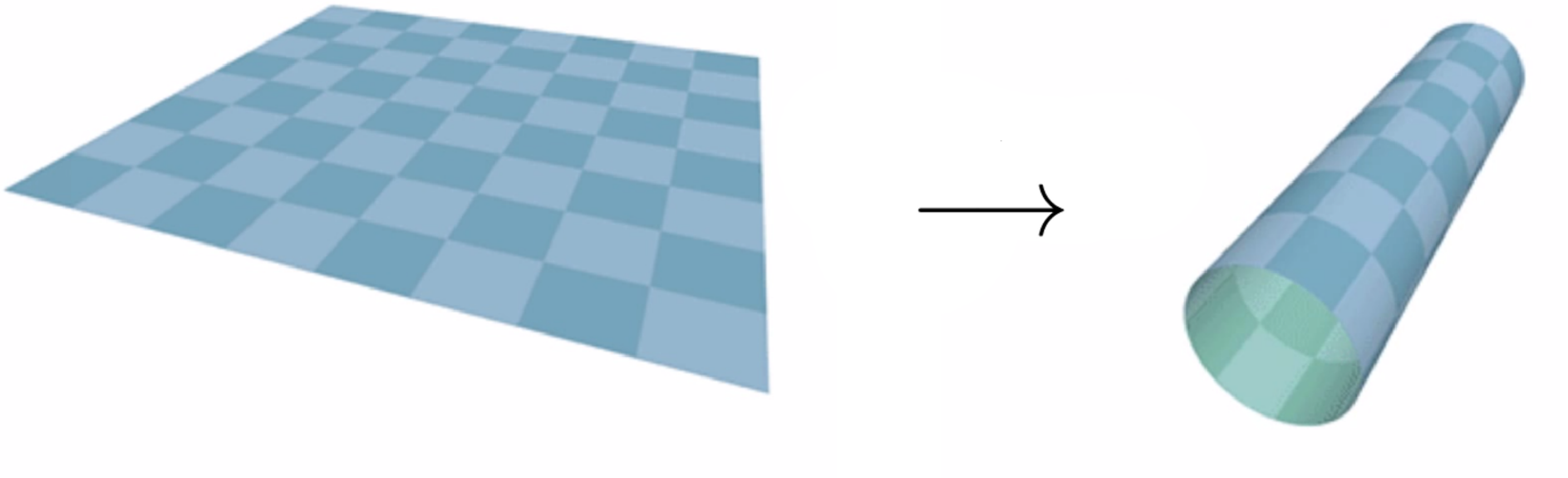


Une application f est **isométrique** si elle conserve la longueur des courbes :

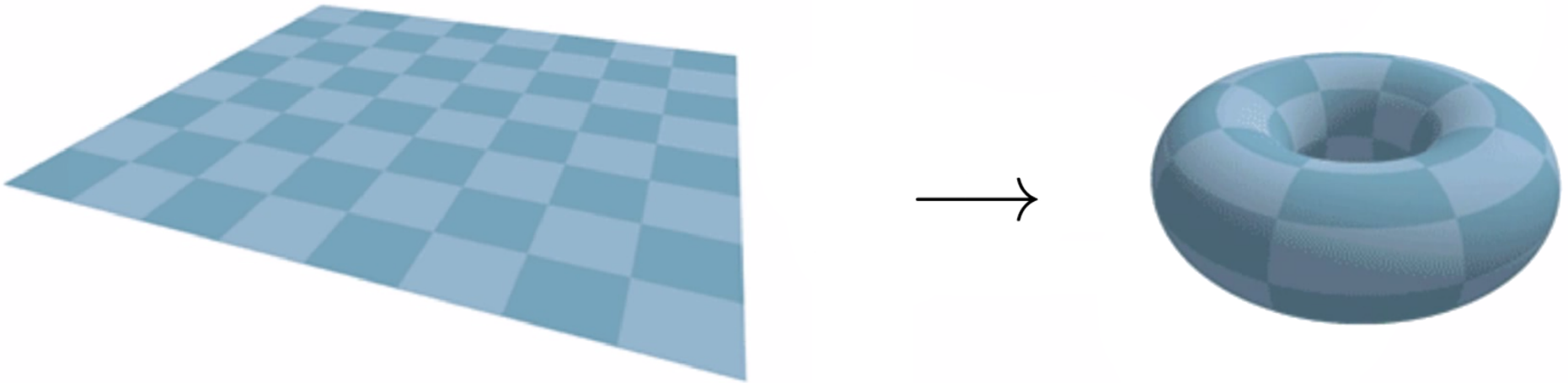
$$Long\,(f \circ c) = Long\,(c)$$

pour toute courbe c de classe C^1.

Une application isométrique



Une application qui n'est pas isométrique



Application isométrique chez les surfaces

- Soient $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$ et $c : I \to \mathbb{E}^2$ alors

$$Long\,(c) = \int_I \|c'(t)\| dt$$

et

$$Long\,(f \circ c) = \int_I \|(f \circ c)'(t)\| dt = \int_I \|df_{c(t)}(c'(t))\| dt$$

Application isométrique chez les surfaces

- Soient $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$ et $c : I \to \mathbb{E}^2$ alors

$$Long\,(c) = \int_I \|c'(t)\| dt$$

et

$$Long\,(f \circ c) = \int_I \|(f \circ c)'(t)\| dt = \int_I \|df_{c(t)}(c'(t))\| dt$$

- L'application $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ est isométrique si et seulement si

$$\|df_p(U)\| = \|U\|$$

pour tout p et tout vecteur $U \in \mathbb{R}^2$.

Application isométrique chez les surfaces

- Soient $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$ et $c : I \to \mathbb{E}^2$ alors

$$Long\,(c) = \int_I \|c'(t)\| dt$$

et

$$Long\,(f \circ c) = \int_I \|(f \circ c)'(t)\| dt = \int_I \|df_{c(t)}(c'(t))\| dt$$

- L'application $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ est isométrique si et seulement si

$$\|df_p(U)\| = \|U\|$$

pour tout p et tout vecteur $U \in \mathbb{R}^2$.

- Cette condition est équivalente à un système d'EDP non linéaires qui, sans surprise, est difficile à résoudre.

Le défaut isométrique

- Le **défaut isométrique** de f en un point p est la forme quadratique

$$\begin{array}{rccc} \Delta(f,p): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \|U\|^2 - \|df_p(U)\|^2 \end{array}$$

De façon évidente, f est une application isométrique ssi $\Delta(f,p) \equiv 0$ pour tout p.

Le défaut isométrique

- Le **défaut isométrique** de f en un point p est la forme quadratique

$$\begin{array}{rccc} \Delta(f,p): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \|U\|^2 - \|df_p(U)\|^2 \end{array}$$

De façon évidente, f est une application isométrique ssi $\Delta(f,p) \equiv 0$ pour tout p.

- Soit $B(f,p)$ la forme bilinéaire symétrique associée

$$B(f,p)(U,V) := \langle U, V\rangle - \langle df_p(U), df_p(V)\rangle$$

Le défaut isométrique

- Le **défaut isométrique** de f en un point p est la forme quadratique

$$\begin{array}{rccc} \Delta(f,p): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \|U\|^2 - \|df_p(U)\|^2 \end{array}$$

De façon évidente, f est une application isométrique ssi $\Delta(f,p) \equiv 0$ pour tout p.

- Soit $B(f,p)$ la forme bilinéaire symétrique associée

$$B(f,p)(U,V) := \langle U, V\rangle - \langle df_p(U), df_p(V)\rangle$$

- Si (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, on écrit

$$B(f,p) = B_{11}(f,p)e_1^* \otimes e_1^* + B_{12}(f,p)(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*) + B_{22}(f,p)e_2^* \otimes e_2^*$$

où (e_1^*, e_2^*) est la base duale $B_{ij}(f,p) = B(f,p)(e_i, e_j)$

Le défaut isométrique

- En particulier

$$f \text{ est isométrique} \iff \text{pour tout } p \text{ on a } \begin{cases} B_{11}(f,p) = 0 \\ B_{12}(f,p) = 0 \\ B_{22}(f,p) = 0 \end{cases}$$

Le défaut isométrique

- En particulier

$$f \text{ est isométrique} \iff \text{pour tout } p \text{ on a } \begin{cases} B_{11}(f,p) &= 0 \\ B_{12}(f,p) &= 0 \\ B_{22}(f,p) &= 0 \end{cases}$$

- Ou, de manière équivalente, f est isométrique ssi pour tout p on a

$$\begin{cases} \|df_p(e_1)\|^2 &= \|e_1\|^2 & (1) \\ \langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle &= \langle e_1, e_2\rangle & (2) \\ \|df_p(e_2)\|^2 &= \|e_2\|^2 & (3) \end{cases}$$

Le défaut isométrique

- En particulier

$$f \text{ est isométrique} \iff \text{pour tout } p \text{ on a } \begin{cases} B_{11}(f,p) &= 0 \\ B_{12}(f,p) &= 0 \\ B_{22}(f,p) &= 0 \end{cases}$$

- Ou, de manière équivalente, f est isométrique ssi pour tout p on a

$$\begin{cases} \|df_p(e_1)\|^2 &= \|e_1\|^2 & (1) \\ \langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle &= \langle e_1, e_2\rangle & (2) \\ \|df_p(e_2)\|^2 &= \|e_2\|^2 & (3) \end{cases}$$

- Ceci est un système de trois EDP non linéaire d'ordre 1.

Le défaut isométrique

- En particulier

$$f \text{ est isométrique} \iff \text{pour tout } p \text{ on a } \begin{cases} B_{11}(f,p) &= 0 \\ B_{12}(f,p) &= 0 \\ B_{22}(f,p) &= 0 \end{cases}$$

- Soit encore, pour tout p on a

$$\begin{cases} \|df_p(e_1)\|^2 &= 1 \quad (1) \\ \langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle &= 0 \quad (2) \\ \|df_p(e_2)\|^2 &= 1 \quad (3) \end{cases}$$

Le défaut isométrique

- En particulier

$$f \text{ est isométrique} \iff \text{pour tout } p \text{ on a } \begin{cases} B_{11}(f,p) &= 0 \\ B_{12}(f,p) &= 0 \\ B_{22}(f,p) &= 0 \end{cases}$$

- Soit encore, pour tout p on a

$$\begin{cases} \|df_p(e_1)\|^2 &= 1 \quad (1) \\ \langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle &= 0 \quad (2) \\ \|df_p(e_2)\|^2 &= 1 \quad (3) \end{cases}$$

- Ceci est un système de trois EDP non linéaire d'ordre 1.

Plongements isométriques pour les connaisseurs

- Une application C^1

$$f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^q, \langle ., . \rangle)$$

entre une variété riemannienne (M^n, g) et un espace euclidien $\mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est **isométrique** si elle préserve la longueur des courbes *i. e.*

$$Long(f \circ c) = Long(c)$$

pour toute courbe paramétrée $c : [0, 1] \longrightarrow M^n$ de classe C^1 par morceaux.

Plongements isométriques pour les connaisseurs

• Dans un système de coordonnées locales $x = (x_1, ..., x_n)$, on peut écrire

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) e_i^* \otimes e_j^*.$$

Plongements isométriques pour les connaisseurs

• Dans un système de coordonnées locales $x = (x_1, ..., x_n)$, on peut écrire

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) e_i^* \otimes e_j^*.$$

• La condition isométrique équivaut à un **système d'EDP non linéaires** :

$$\text{Pour tout} \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \qquad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}$$

de $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ équations. Le nombre s_n est appelé la *dimension de Janet*.

Plongements isométriques pour les connaisseurs

• Dans un système de coordonnées locales $x = (x_1, ..., x_n)$, on peut écrire

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) e_i^* \otimes e_j^*.$$

• La condition isométrique équivaut à un **système d'EDP non linéaires** :

$$\text{Pour tout} \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \qquad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}$$

de $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ équations. Le nombre s_n est appelé la *dimension de Janet*.

• De manière équivalente, $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est une *application isométrique* si $f^* \langle ., . \rangle = g$.

Plongements isométriques

Ludwig Schläfli

Conjecture de Schläfli (1873).– *Toute variété riemannienne C^ω de dimension n admet un plongement isométrique local C^ω dans $\mathbb{E}^{s_n}$ avec*

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aspect local

Théorème de Janet-Cartan (1926-27).– *Toute variété riemannienne analytique M^n admet localement un plongement isométrique analytique dans $\mathbb{E}^q$ avec $q = s_n$.*

Aspect local

Théorème de Janet-Cartan (1926-27).– *Toute variété riemannienne analytique M^n admet localement un plongement isométrique analytique dans $\mathbb{E}^q$ avec $q = s_n$.*

Théorème (Nash 1956, Gromov, Rokhlin, Greene 1970).– *Toute variété riemannienne C^∞ admet localement un plongement isométrique C^∞ dans $\mathbb{E}^q$ avec $q = s_n + n$.*

Aspect local

Théorème de Janet-Cartan (1926-27).– *Toute variété riemannienne analytique M^n admet localement un plongement isométrique analytique dans $\mathbb{E}^q$ avec $q = s_n$.*

Théorème (Nash 1956, Gromov, Rokhlin, Greene 1970).– *Toute variété riemannienne C^∞ admet localement un plongement isométrique C^∞ dans $\mathbb{E}^q$ avec $q = s_n + n$.*

Théorème (Poznyak, 1973).– *Toute surface riemannienne C^∞ admet localement un plongement isométrique C^∞ dans $\mathbb{E}^4$.*

Aspect global

Théorème (Nash 1956, Gromov 1986, Gunther 1989).– *Toute variété riemannienne M^n compacte C^∞ admet un plongement lisse isométrique dans $\mathbb{E}^q$ avec*

$$q = \max\{s_n + 2n, s_n + n + 5\}$$

où $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Aspect global

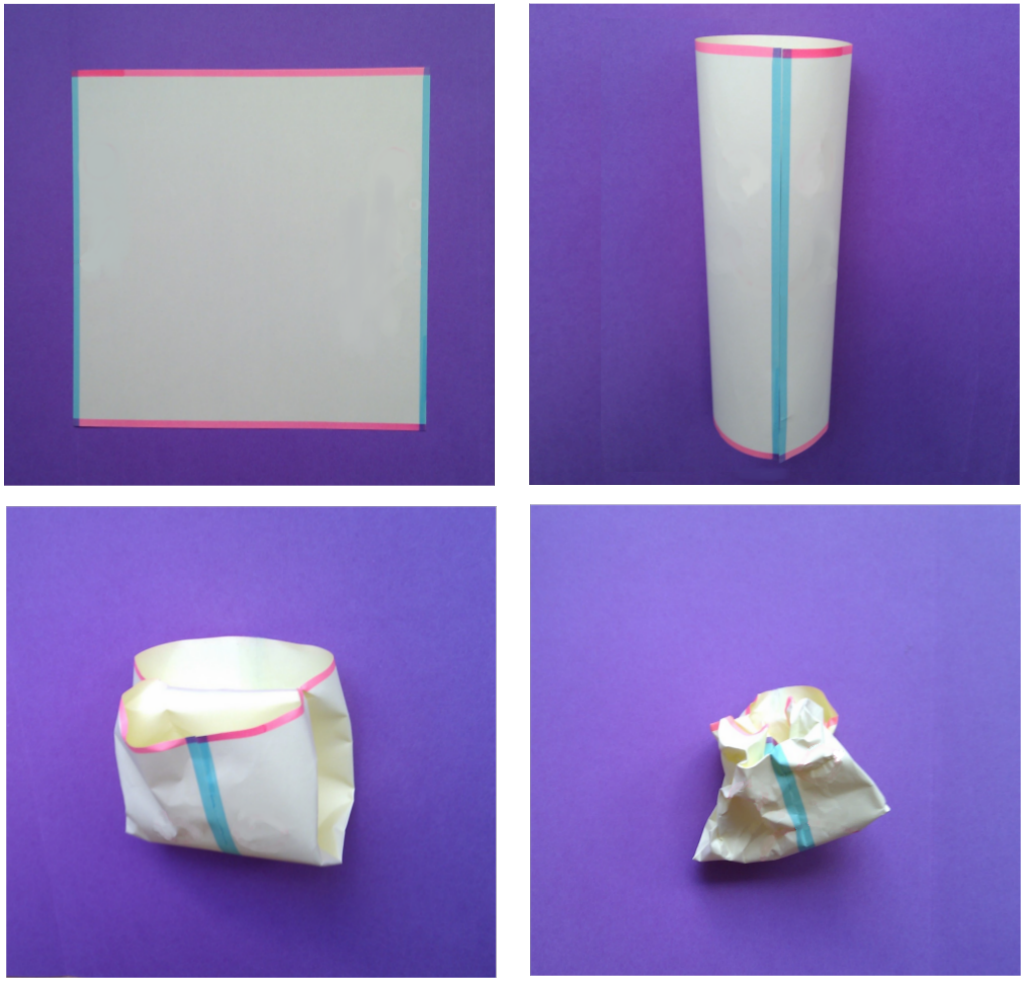
Théorème (Nash 1956, Gromov 1986, Gunther 1989).– *Toute variété riemannienne M^n compacte C^∞ admet un plongement lisse isométrique dans $\mathbb{E}^q$ avec*

$$q = \max\{s_n + 2n, s_n + n + 5\}$$

où $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Théorème (Gromov 1989).– *Toute surface riemannienne compacte C^∞ admet un plongement lisse isométrique dans $\mathbb{E}^5$*

Résultats de non existence (I)



Corollaire du Theorema Egregium de Gauss (1827).– *Il n'existe pas de plongement C^2 isométrique du tore plat carré dans $\mathbb{E}^3$.*

Résultats de non existence (II)

Théorème de Liebmann (1900).– *Si une surface est C^2-isométrique à la sphère alors elle est congruente à la sphère. En particulier, les sphères sont rigides.*

Résultats de non existence (III)

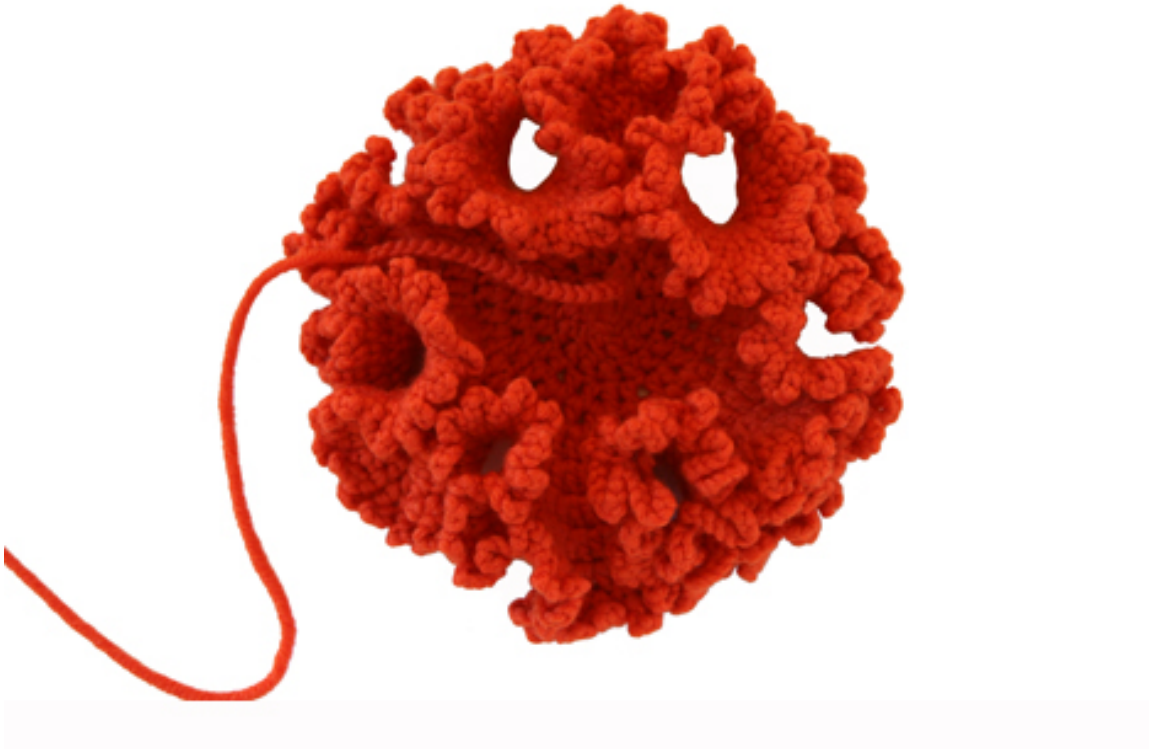


Image from Institute For Figuring

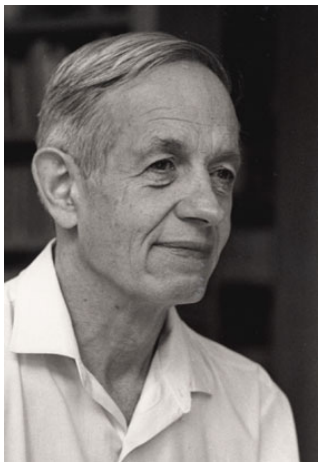
Théorème de Hilbert (1901).– *Il n'existe pas de plongement isométriques C^2 de l'espace hyperbolique dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$.*

Le théorème de plongement C^1 (Nash-Kuiper 1954)

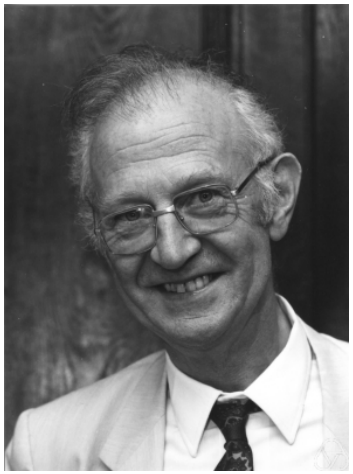
Définition.– Une application $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est dite *courte* (au sens strict) s'il existe $K < 1$ tel que $f^* \langle ., . \rangle < Kg$.

Le théorème de plongement C^1 (Nash-Kuiper 1954)

Définition.– Une application $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est dite *courte* (au sens strict) s'il existe $K < 1$ tel que $f^* \langle ., . \rangle < Kg$.



John Forbes Nash



Nicolaas Kuiper

Théorème (1954-55-59)– *Soit $f_0 : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$, $q > n$, un plongement strictement court. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un plongement C^1 isométrique $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ tel que $\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$.*

Le théorème de plongement C^1 (Nash-Kuiper 1954)

Théorème (1954-55-59)– *Soit* $f_0 : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$, $q > n$, *un plongement strictement court. Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un plongement* C^1 *isométrique* $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *tel que* $\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$.

Le théorème de plongement C^1 (Nash-Kuiper 1954)

Théorème (1954-55-59)– *Soit* $f_0 : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$, $q > n$, *un plongement strictement court. Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un plongement* C^1 *isométrique* $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *tel que* $\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$.

• Nash démontre le cas $q \geq n + 2$ (1954), Kuiper celui de la codimension un, $q = n + 1$ (1955), et explore plus en profondeur le cas non compact (1959).

Le théorème de plongement C^1 (Nash-Kuiper 1954)

Théorème (1954-55-59)– *Soit* $f_0 : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$, $q > n$, *un plongement strictement court. Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un plongement* C^1 *isométrique* $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *tel que* $\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$.

• Nash démontre le cas $q \geq n + 2$ (1954), Kuiper celui de la codimension un, $q = n + 1$ (1955), et explore plus en profondeur le cas non compact (1959).

• La condition de proximité C^0 n'apparaît explicitement que dans l'article de 1959.

Le théorème de plongement C^1 (Nash-Kuiper 1954)

Théorème (1954-55-59)– *Soit* $f_0 : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$, $q > n$, *un plongement strictement court. Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un plongement* C^1 *isométrique* $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *tel que* $\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$.

• Nash démontre le cas $q \geq n + 2$ (1954), Kuiper celui de la codimension un, $q = n + 1$ (1955), et explore plus en profondeur le cas non compact (1959).

• La condition de proximité C^0 n'apparaît explicitement que dans l'article de 1959.

• Le théorème de Nash-Kuiper montre que la barrière de la dimension de Janet's peut être ignorée à condition de d'abaisser la régularité du plongement.

Quelques corollaires déconcertants

- Il existe d'innombrables plongements isométriques C^1 du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$.

Quelques corollaires déconcertants

• Il existe d'innombrables plongements isométriques C^1 du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$.

• Les sphères ne sont plus rigides sous les déformations isométriques C^1. En particulier, il existe des **sphères réduites** i.e des plongements isométriques de la sphère unité dans une boule arbitrairement petite.

Quelques corollaires déconcertants

• Il existe d'innombrables plongements isométriques C^1 du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$.

• Les sphères ne sont plus rigides sous les déformations isométriques C^1. En particulier, il existe des **sphères réduites** i.e des plongements isométriques de la sphère unité dans une boule arbitrairement petite.

• Il existe des plongements C^1 isométriques de l'espace hyperbolique dans $\mathbb{E}^3$.

Quelques corollaires déconcertants

• Il existe d'innombrables plongements isométriques C^1 du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$.

• Les sphères ne sont plus rigides sous les déformations isométriques C^1. En particulier, il existe des **sphères réduites** i.e des plongements isométriques de la sphère unité dans une boule arbitrairement petite.

• Il existe des plongements C^1 isométriques de l'espace hyperbolique dans $\mathbb{E}^3$.

Quelle peut être la géométrie de ces objets C^1 ?

Quelques corollaires déconcertants

• Il existe d'innombrables plongements isométriques C^1 du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$.

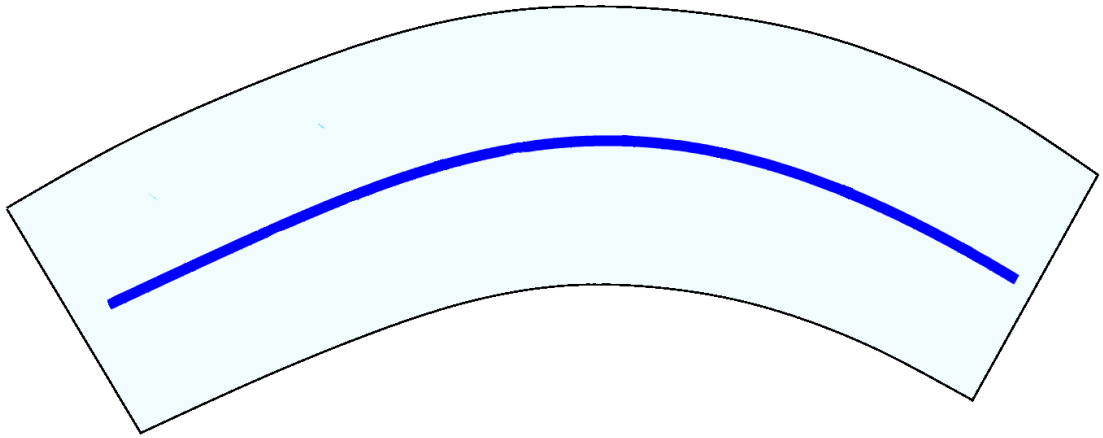
• Les sphères ne sont plus rigides sous les déformations isométriques C^1. En particulier, il existe des **sphères réduites** i.e des plongements isométriques de la sphère unité dans une boule arbitrairement petite.

• Il existe des plongements C^1 isométriques de l'espace hyperbolique dans $\mathbb{E}^3$.

Quelle peut être la géométrie de ces objets C^1 ?

• Pour en avoir une idée, on va construire un plongement isométrique du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$ en utilisant les outils de l'intégration convexe.

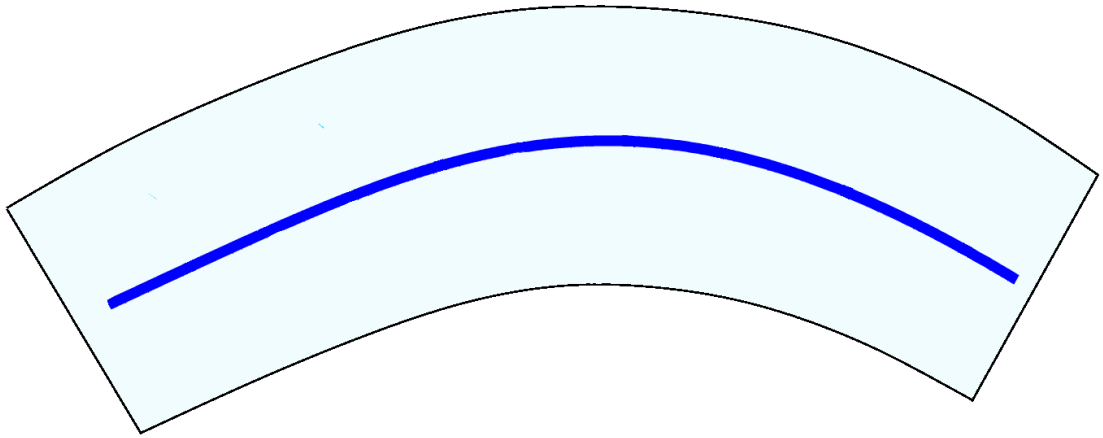
Le cas 1D



Étant donnés

- une immersion courte $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ i. e. $0 < |f_0'(t)| < 1$ pour tout $t \in [0,1]$
- et un nombre $\epsilon > 0$

Le cas 1D



Étant donnés

• une immersion courte $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ i. e. $0 < |f_0'(t)| < 1$ pour tout $t \in [0,1]$

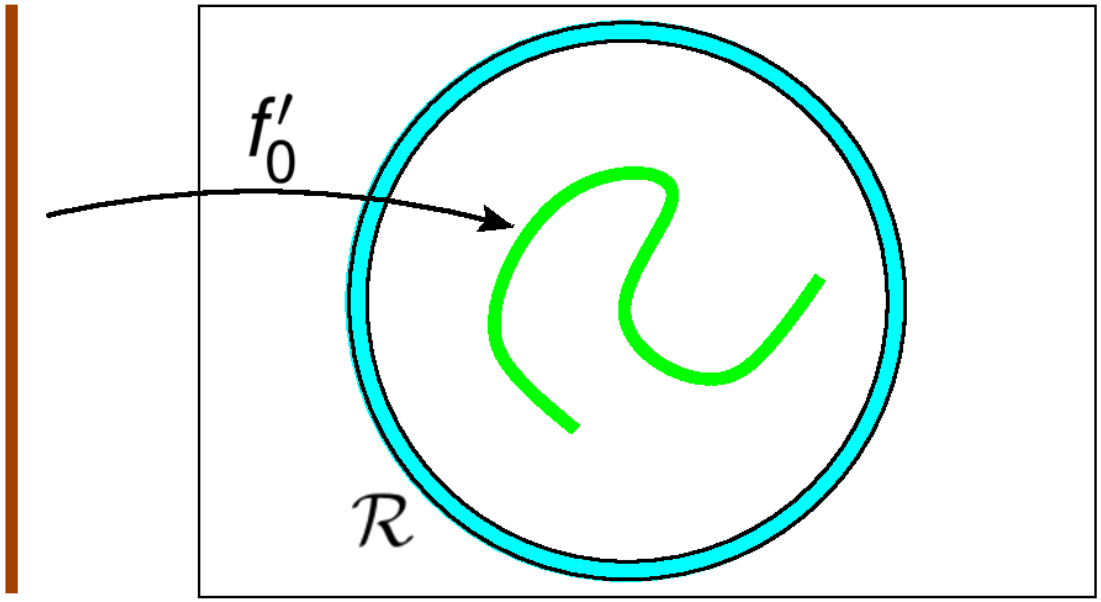
• et un nombre $\epsilon > 0$

Trouver une nouvelle courbe $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

i) $|\|f'(t)\| - 1| \leq \epsilon$ pour tout $t \in [0,1]$

ii) $\|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$

Le cas 1D



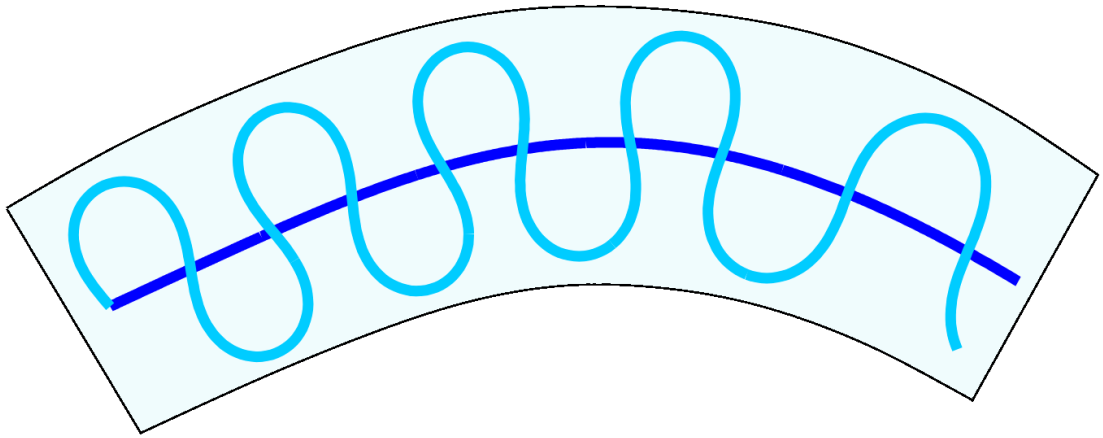
Solution.– Soit $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon\}$. Observons que

$$\forall t \in [0,1], \quad f_0'(t) \in Conv(\mathcal{R}).$$

Une solution s'obtient par un procédé de corrugation $f = CP(f_0, \gamma, N)$ puisque :

i) $\|f'(t)\| = 1 + O\left(\frac{1}{N}\right)$ pour tout $t \in [0,1]$
ii) $\|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$

Le cas 1D



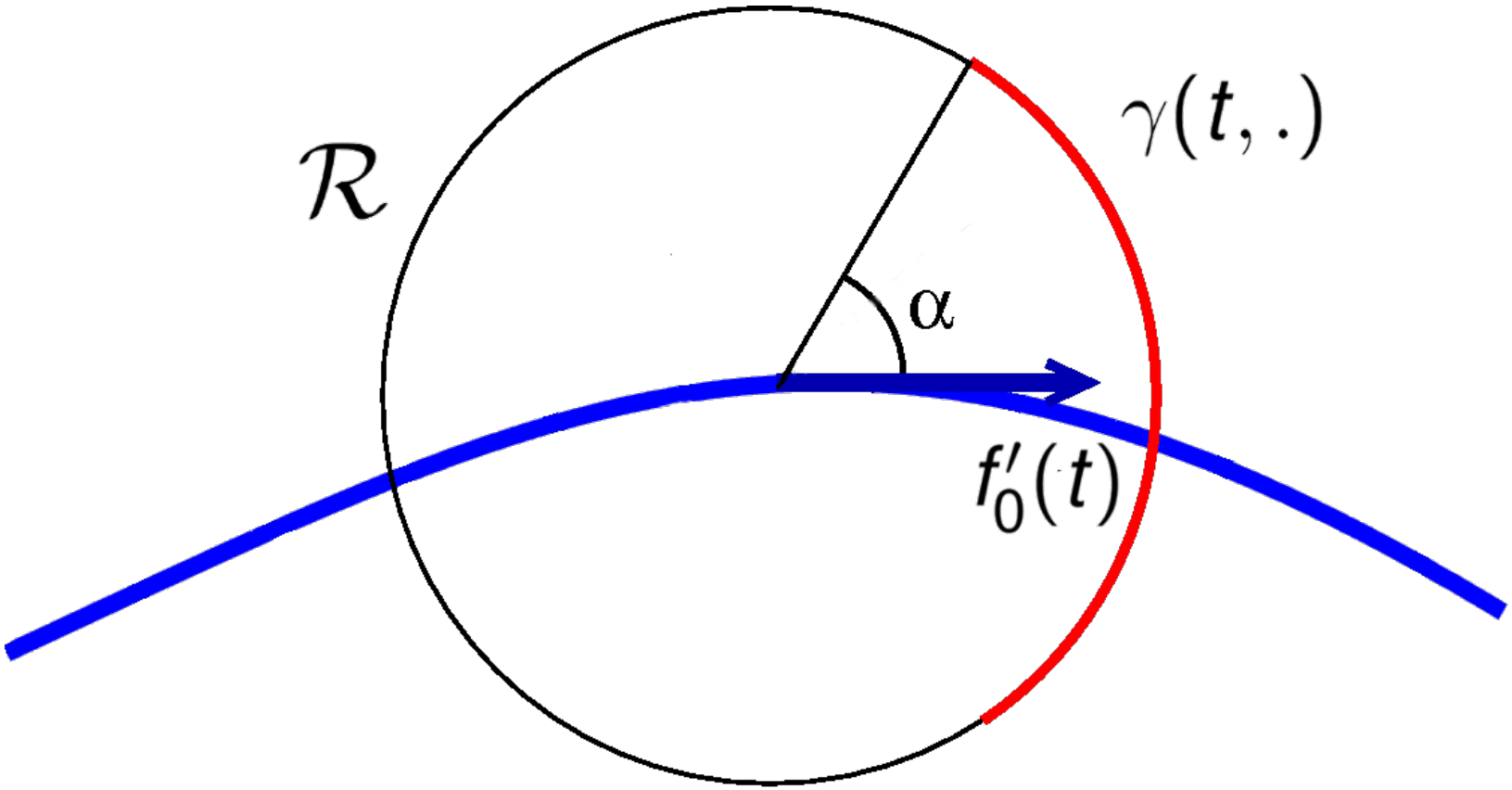
Solution.– Soit $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon\}$. Observons que

$$\forall t \in [0,1], \quad f_0'(t) \in Conv(\mathcal{R}).$$

Une solution f s'obtient par un procédé de corrugation appliqué à f_0 :

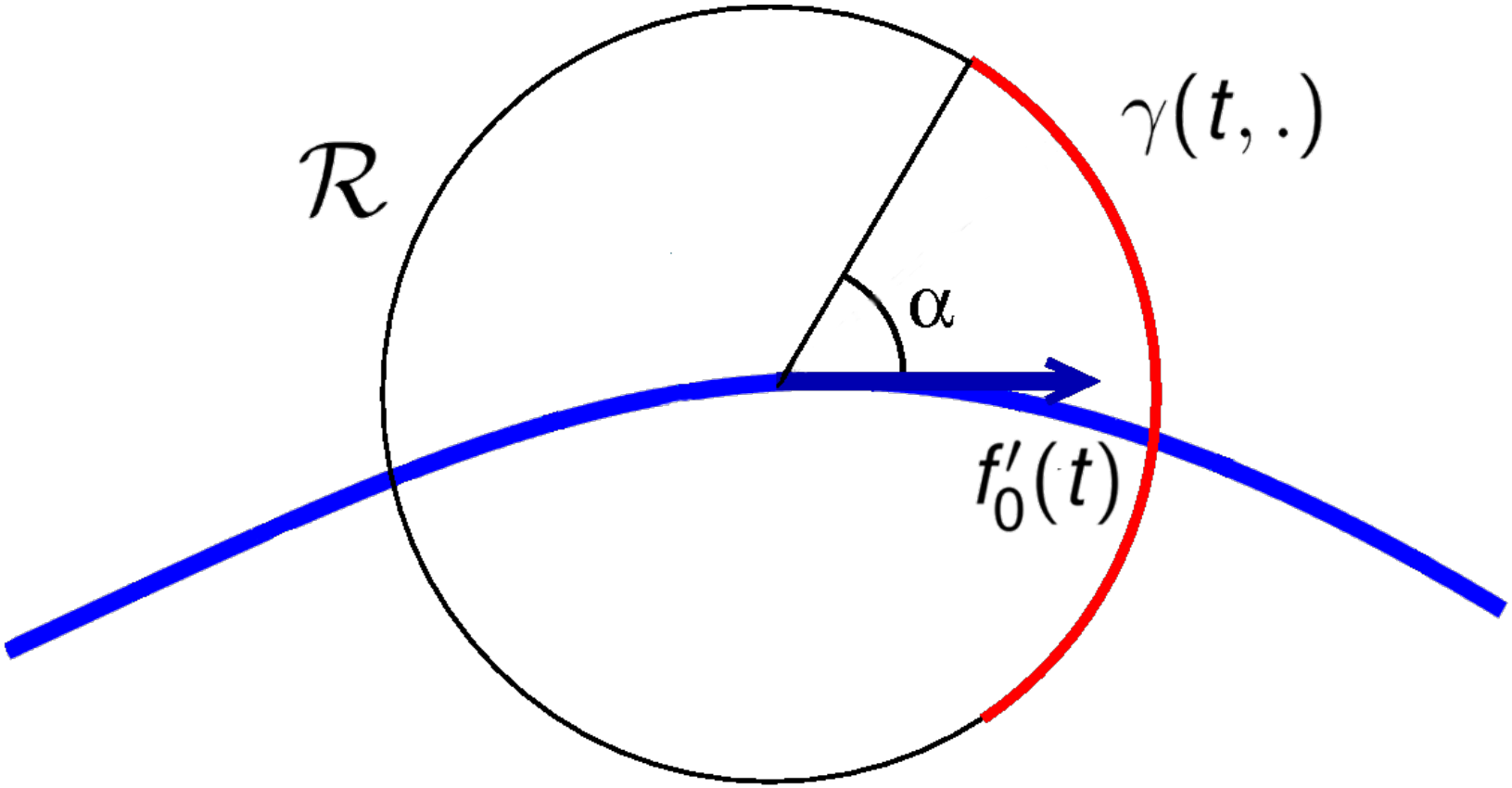
$$f = CP(f_0, \gamma, N)$$

Choix de la famille de lacets γ



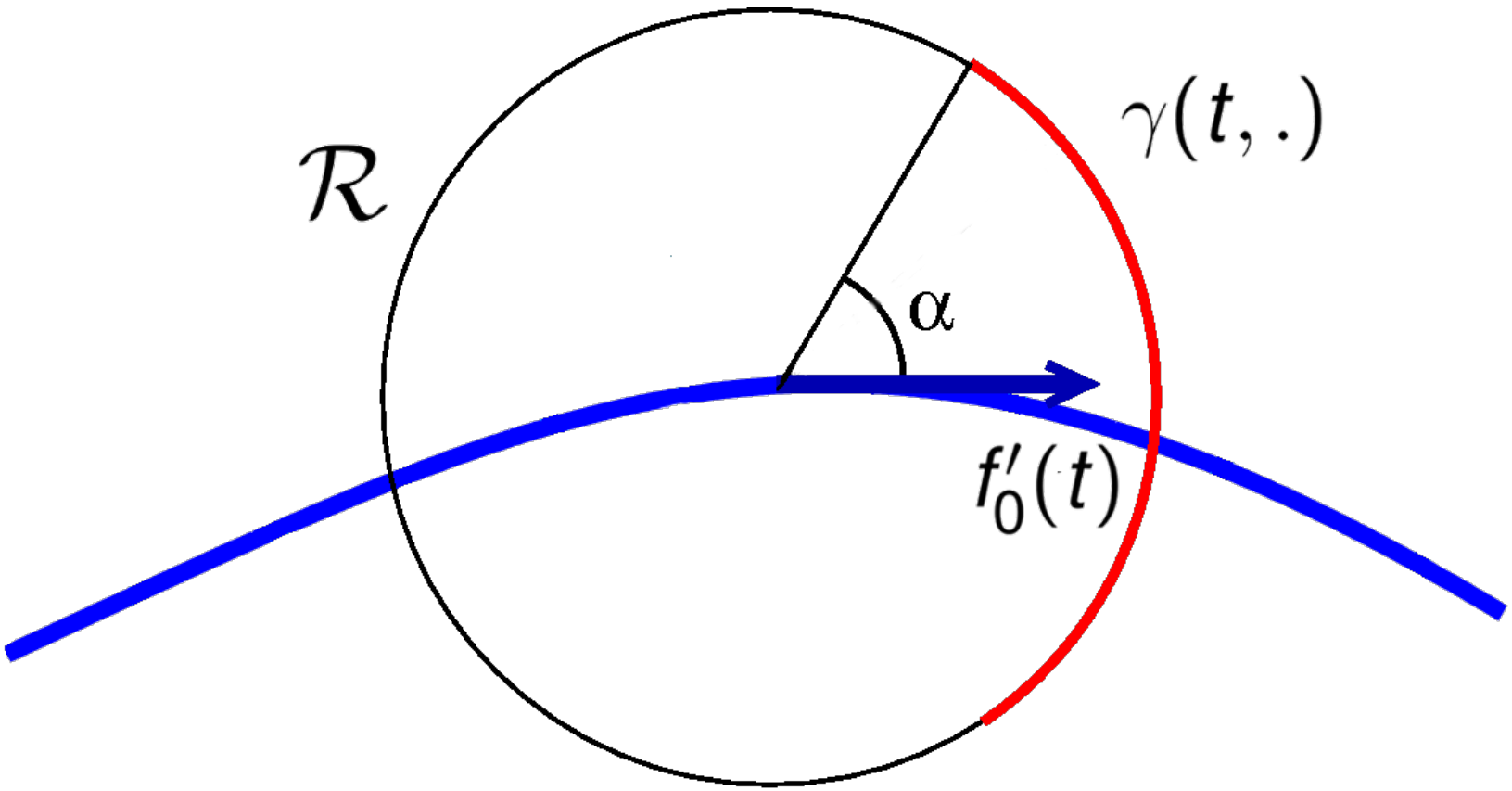
$$\gamma(t,s) := e^{i\theta(s)} \frac{f_0'(t)}{\|f_0'(t)\|} \quad \text{avec} \quad \theta(s) = \alpha \cos(2\pi s)$$

Choix de la famille de lacets γ



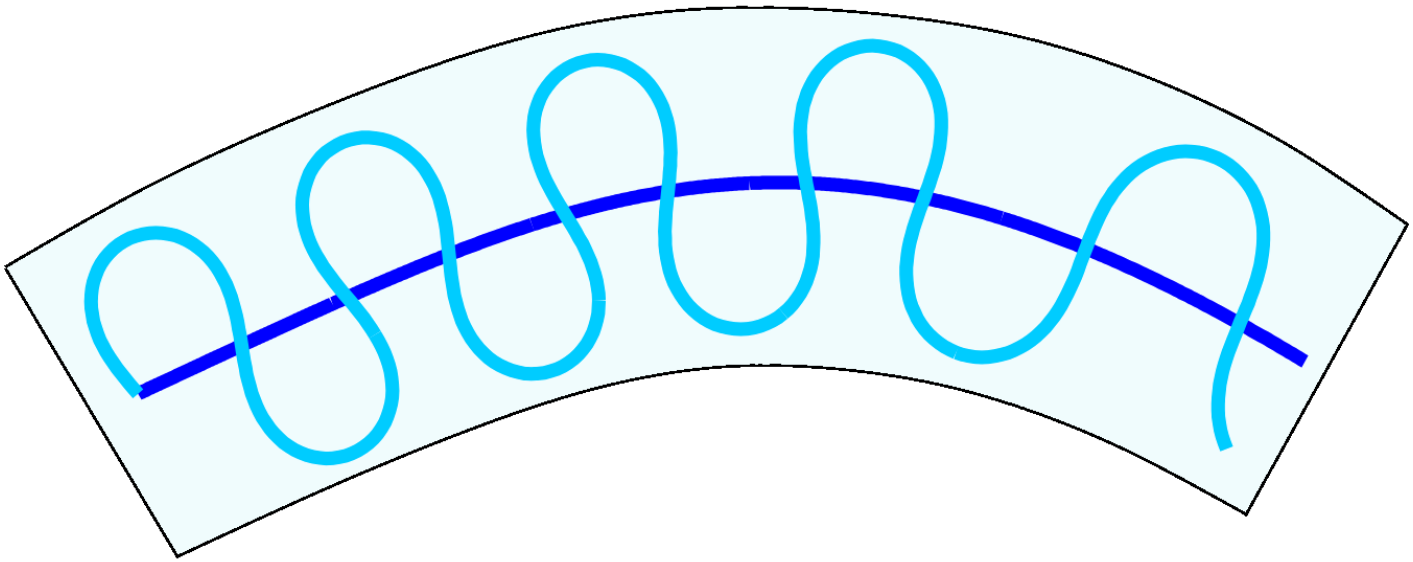
$\alpha = \alpha(t)$ est choisi tel que $\int_0^1 \gamma(t,u)du = f_0'(t)$.

Choix de la famille de lacets γ



Ceci revient à prendre $\alpha(t) = J_0^{-1}\left(f_0'(t)\right)$.

Solutions explicites



Expression explicite de $f = CP(f_0, \gamma, N)$:

$$f(t) = f_0(t) + \frac{1}{N}\int_0^{Nt} (\gamma_u(u) - \bar{\gamma}_u)\, du \quad \text{où} \quad \gamma_u(s) = e^{i\alpha(u)\cos(2\pi s)} \frac{f_0'(t)}{\|f_0'(t)\|}.$$

De la 1D à la 2D

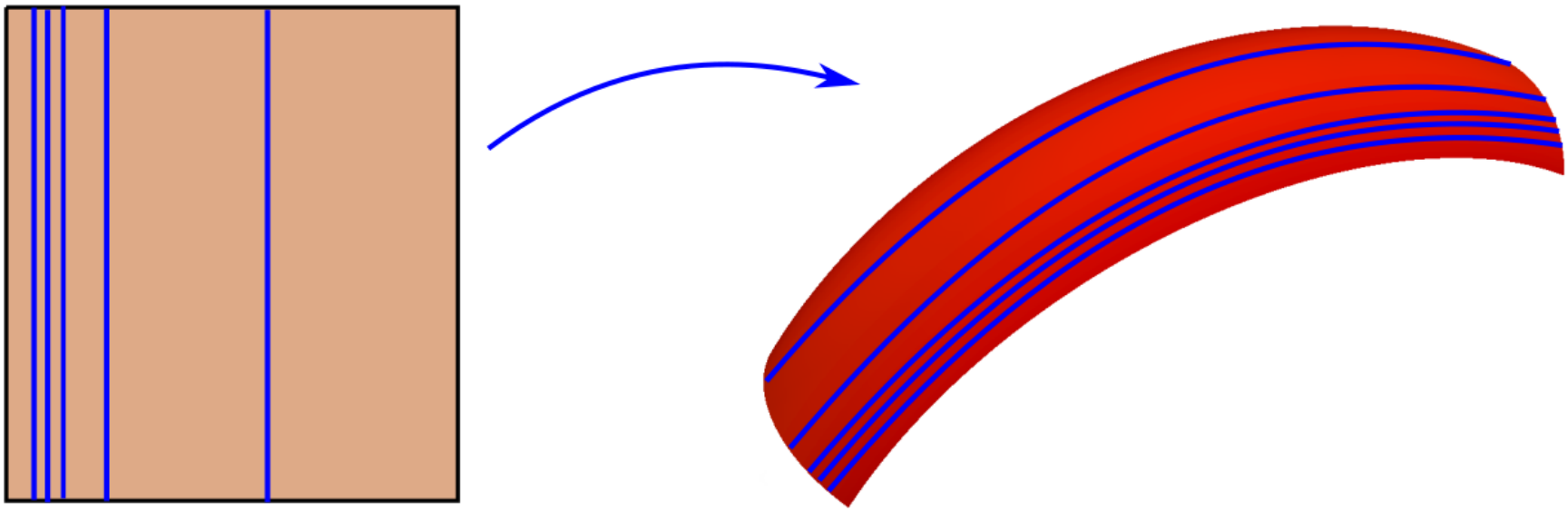
Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$

De la 1D à la 2D

Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$



Solution.– D'abord, on choisit une direction U_1 et on apllique le procédé de corrugation = f_0 le long des droites de vecteur directeur U_1.

De la 1D à la 2D

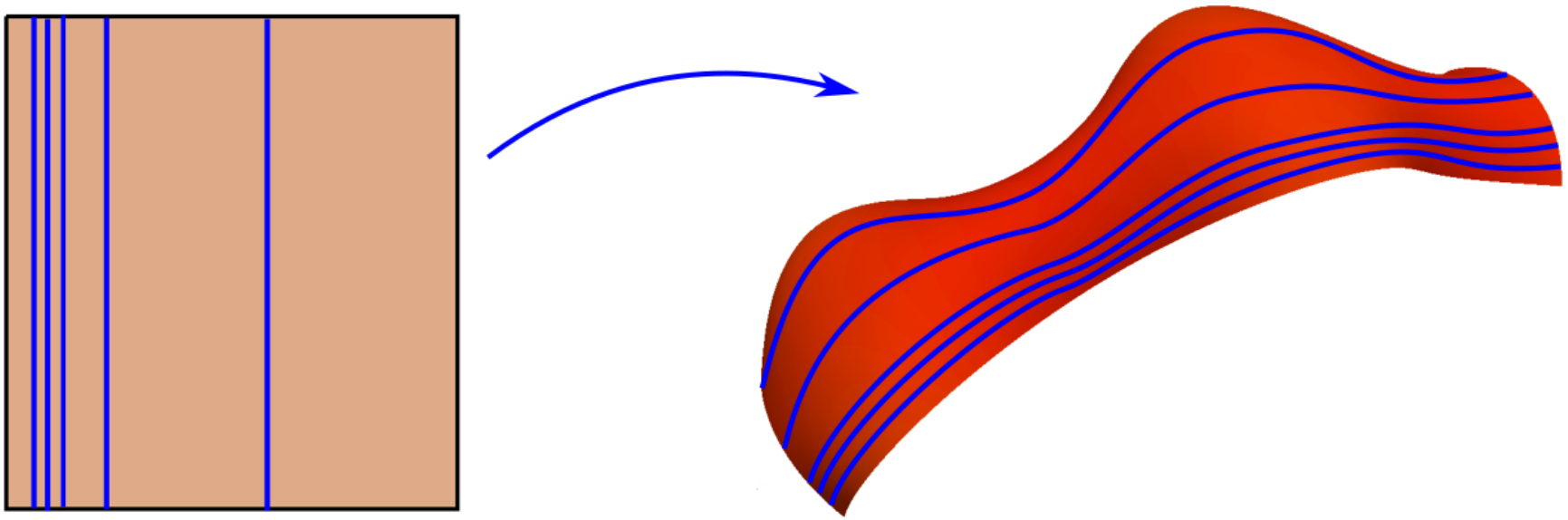
Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$

De la 1D à la 2D

Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$



Solution.– L'application obtenue $f_1 = CP(f_0, \gamma, N_1)$ est presque isométrique dans la direction U_1 i. e.

$$\|df_1(U_1)\| = \|U_1\| + O\left(\frac{1}{N_1}\right)$$

De la 1D à la 2D

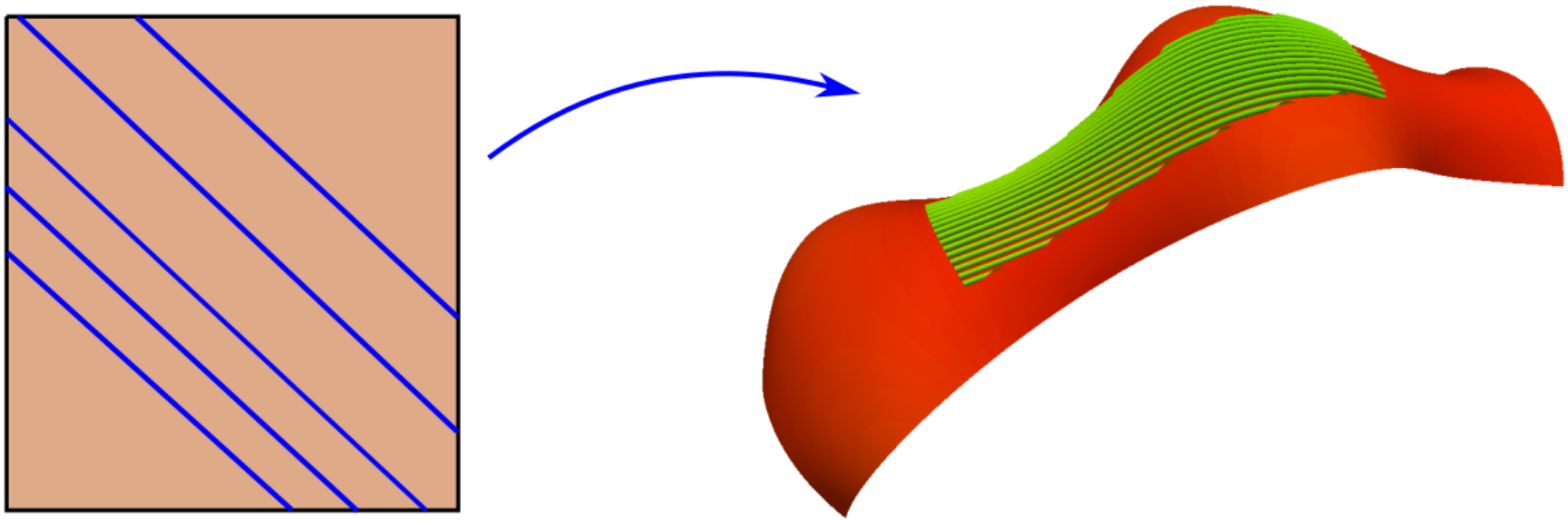
Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$

De la 1D à la 2D

Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$



Solution.– On considère une autre direction U_2 et on réalise un procédé de corrugation $f_2 = CP(f_1, \gamma, N_2)$ dans la direction U_2.

De la 1D à la 2D

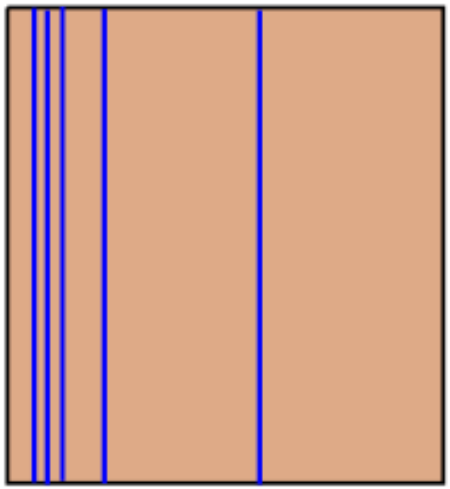
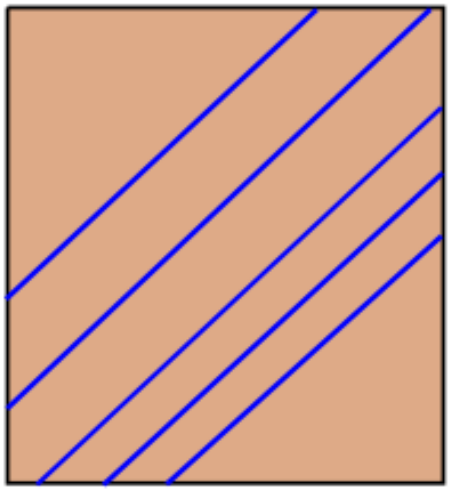
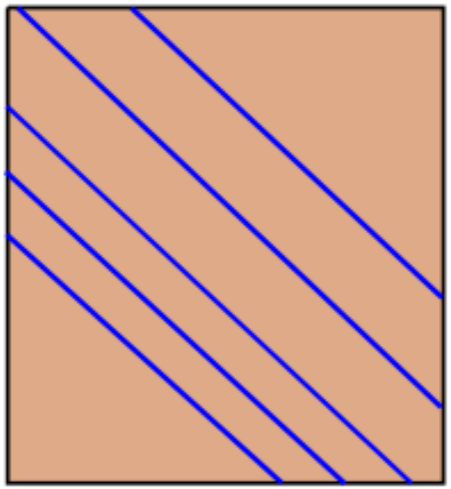
Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$

De la 1D à la 2D

Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$

Solution.– Si, pour trois directions U_1, U_2 et U_3, on a

$$\|df(U_i)\| = \|U_i\| + O\left(\frac{1}{N_i}\right)$$

alors $\|df(U)\| = \|U\| + O\left(\frac{1}{N_1}\right) + O\left(\frac{1}{N_2}\right) + O\left(\frac{1}{N_3}\right)$ pour tout U.

De la 1D à la 2D

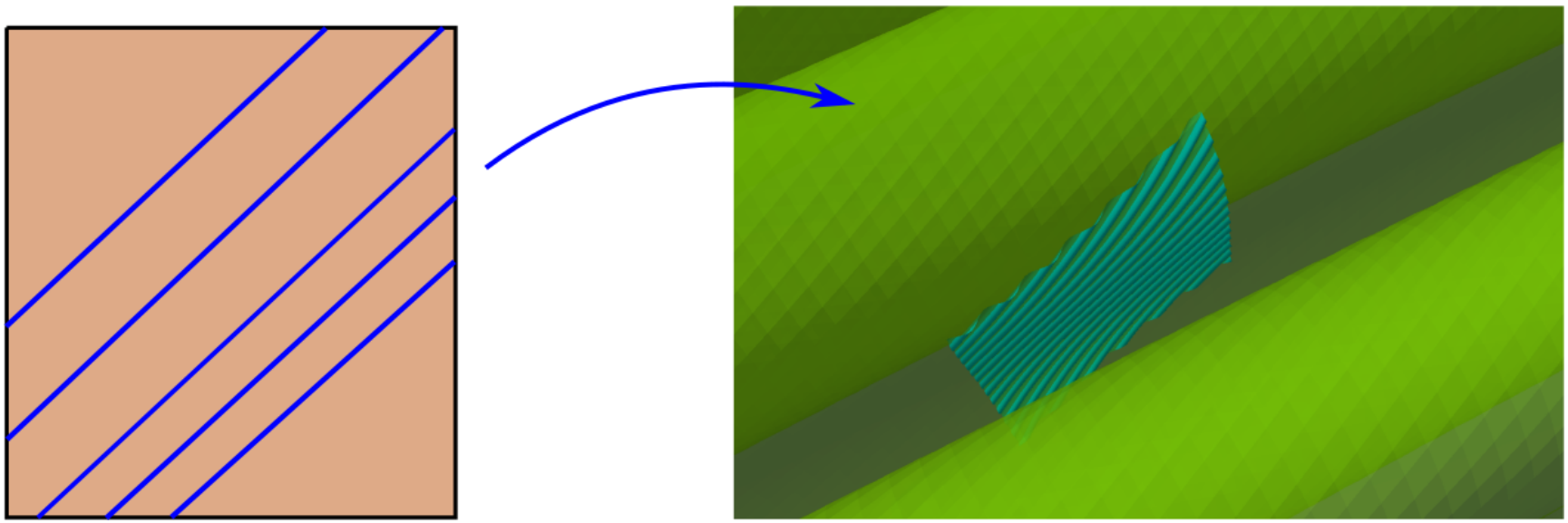
Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$

De la 1D à la 2D

Problème.– Étant donnée une application strictement courte f_0, trouver une application f telle que

$$\|df(U)\| = \|U\| \quad \text{pour tout } U$$



Solution.– Pour autant, $f_3 = CP(f_2, \gamma, N_3)$ n'est pas isométrique puisque...

$$\|df_3(U)\|^2 = \|U\|^2 + O(1/N_1) + O(1/N_2) + O(1/N_3)$$

De la 1D à la 2D

Rappel. – Le **défaut isométrique** de f au point p est la forme quadratique

$$\begin{array}{rccc} \Delta(f,p): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \|U\|^2 - \|df_p(U)\|^2 \end{array}$$

et f est isométrique ssi $\Delta(f,p) \equiv 0$ pour tout p.

De la 1D à la 2D

Rappel. – Le **défaut isométrique** de f au point p est la forme quadratique

$$\begin{array}{rccc} \Delta(f,p): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \|U\|^2 - \|df_p(U)\|^2 \end{array}$$

et f est isométrique ssi $\Delta(f,p) \equiv 0$ pour tout p.

- On vient d'obtenir une application f_3 telle que

$$\|\Delta(f_3)\| = O(1/N_1) + O(1/N_2) + O(1/N_3).$$

Puisque $\Delta(f_3) \neq 0$: l'application f_3 n'est pas isométrique.

De la 1D à la 2D

Rappel. – Le **défaut isométrique** de f au point p est la forme quadratique

$$\begin{array}{rccc} \Delta(f,p): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \|U\|^2 - \|df_p(U)\|^2 \end{array}$$

et f est isométrique ssi $\Delta(f,p) \equiv 0$ pour tout p.

- On vient d'obtenir une application f_3 telle que

$$\|\Delta(f_3)\| = O(1/N_1) + O(1/N_2) + O(1/N_3).$$

Puisque $\Delta(f_3) \neq 0$: l'application f_3 n'est pas isométrique.

- L'idée naturelle est de prendre la limite de f_3 quand

$$N_1 \to +\infty, \quad N_2 \to +\infty \text{ and } N_3 \to +\infty$$

mais ceci échoue car $\lim_{N_1,N_2,N_3\to+\infty} f_3 = f_0$.

Le contournement de Nash

• Nash propose de contourner le problème en considérant un but plus modeste, à savoir celui de diviser le défaut isométrique approximativement par deux plutôt que de vouloir le mettre à zéro immédiatement :

$$\|\Delta(f_3)\| \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{2}.$$

Puisque

$$\|\Delta(f_3)\| = O(1/N_1) + O(1/N_2) + O(1/N_3)$$

ce nouveau but est atteignable si l'on prend N_1, N_2 et N_3 suffisamment grands.

Le contournement de Nash

• Nash propose de contourner le problème en considérant un but plus modeste, à savoir celui de diviser le défaut isométrique approximativement par deux plutôt que de vouloir le mettre à zéro immédiatement :

$$\|\Delta(f_3)\| \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{2}.$$

Puisque

$$\|\Delta(f_3)\| = O(1/N_1) + O(1/N_2) + O(1/N_3)$$

ce nouveau but est atteignable si l'on prend N_1, N_2 et N_3 suffisamment grands.

• Puis, il applique ce même programme à f_3 pour obtenir une nouvelle application f_6 telle que

$$\|\Delta(f_6)\| \leq \frac{\|\Delta(f_3)\|}{2} \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{4}.$$

Le contournement de Nash

- Et ainsi de suite, pour tout k nous obtenons

$$\|\Delta(f_{3k})\| \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{2^k}$$

Le contournement de Nash

- Et ainsi de suite, pour tout k nous obtenons

$$\|\Delta(f_{3k})\| \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{2^k}$$

- Grâce au fait que

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_k}\right)$$

on peut déduire que la suite $(f_{3k})_k$ est de Cauchy pour la norme C^0.

Le contournement de Nash

- Et ainsi de suite, pour tout k nous obtenons

$$\|\Delta(f_{3k})\| \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{2^k}$$

- Grâce au fait que

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_k}\right)$$

on peut déduire que la suite $(f_{3k})_k$ est de Cauchy pour la norme C^0.

- Par conséquent la suite $(f_k)_k$ est C^0 convergente vers une application f_∞ qui est nécessairement continue.

Le contournement de Nash

- Et ainsi de suite, pour tout k nous obtenons

$$\|\Delta(f_{3k})\| \leq \frac{\|\Delta(f_0)\|}{2^k}$$

- Grâce au fait que

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_k}\right)$$

on peut déduire que la suite $(f_{3k})_k$ est de Cauchy pour la norme C^0.

- Par conséquent la suite $(f_k)_k$ est C^0 convergente vers une application f_∞ qui est nécessairement continue.

- Le fait que la suite $(f_k)_k$ est de Cauchy pour la norme C^1 est moins évident. On l'admet. Ce fait implique que f_∞ est C^1. Puisque son défaut isométrique est nulle, l'application est isométrique.

Construction explicite d'un tore plat dans $\mathbb{E}^3$ (2012)

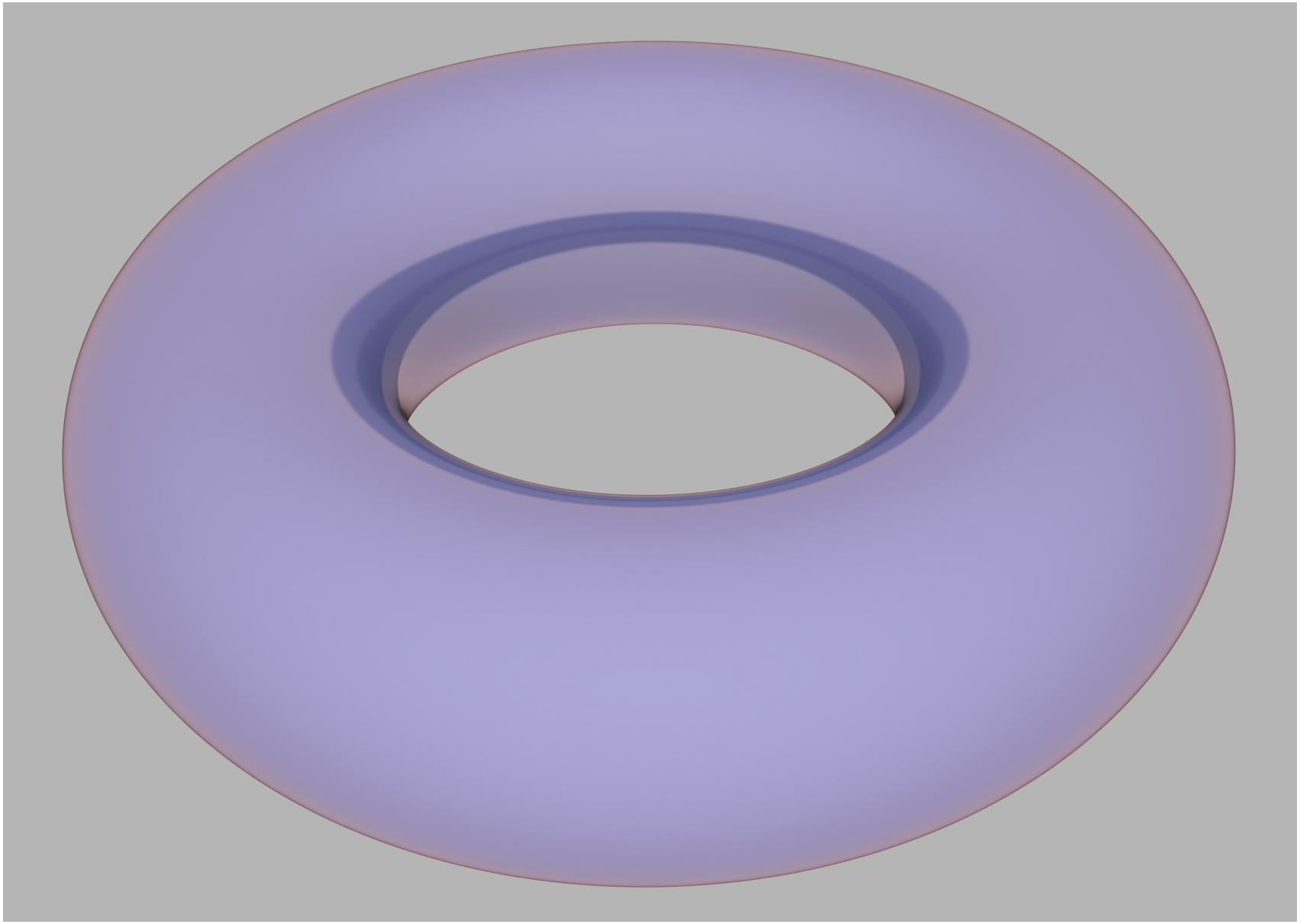


Image : Hevea Team

Un CP dans la première direction

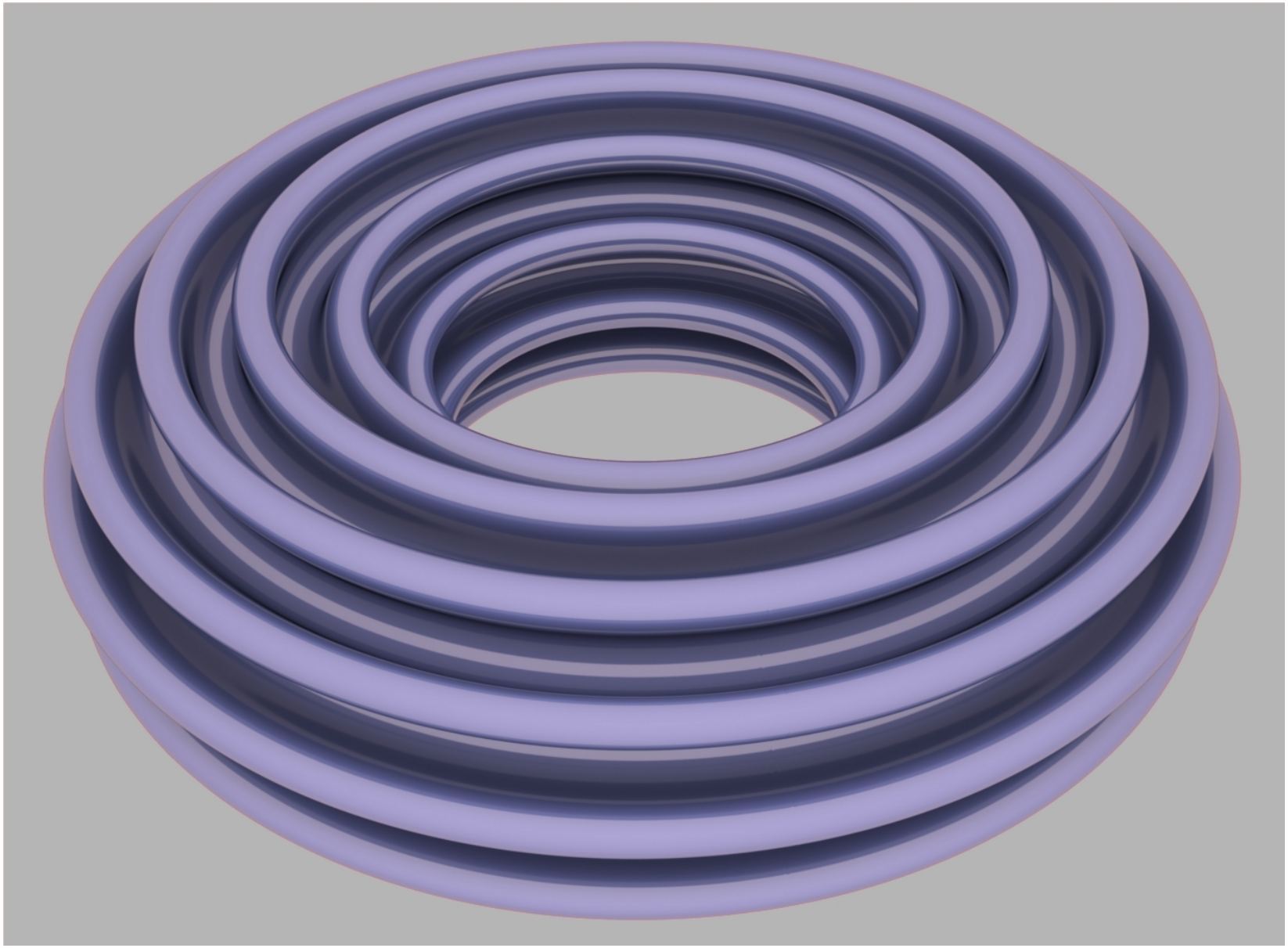


Image : Hevea Team

Un autre CP dans une seconde direction

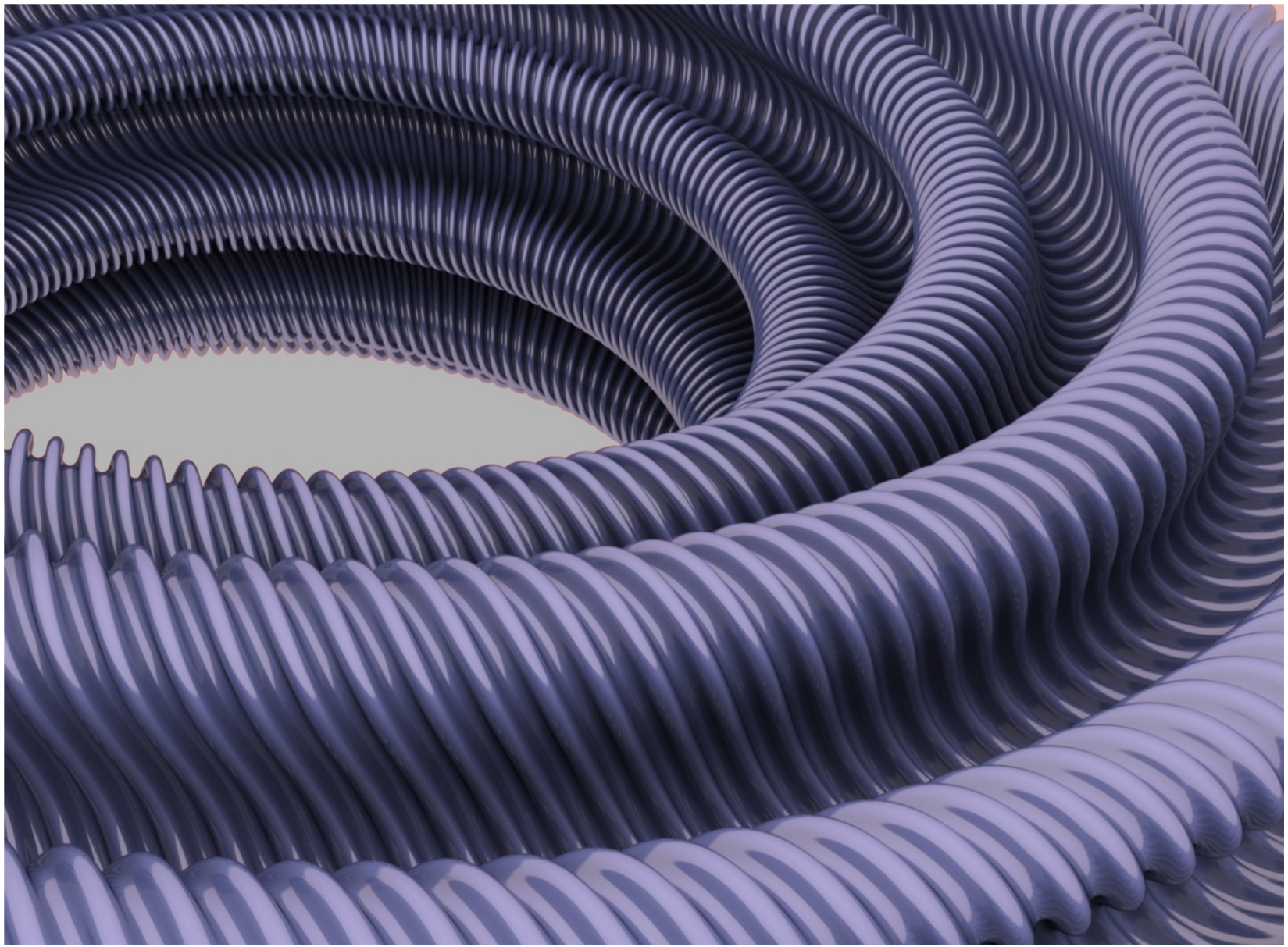


Image : Hevea Team

Un autre CP dans une troisième direction

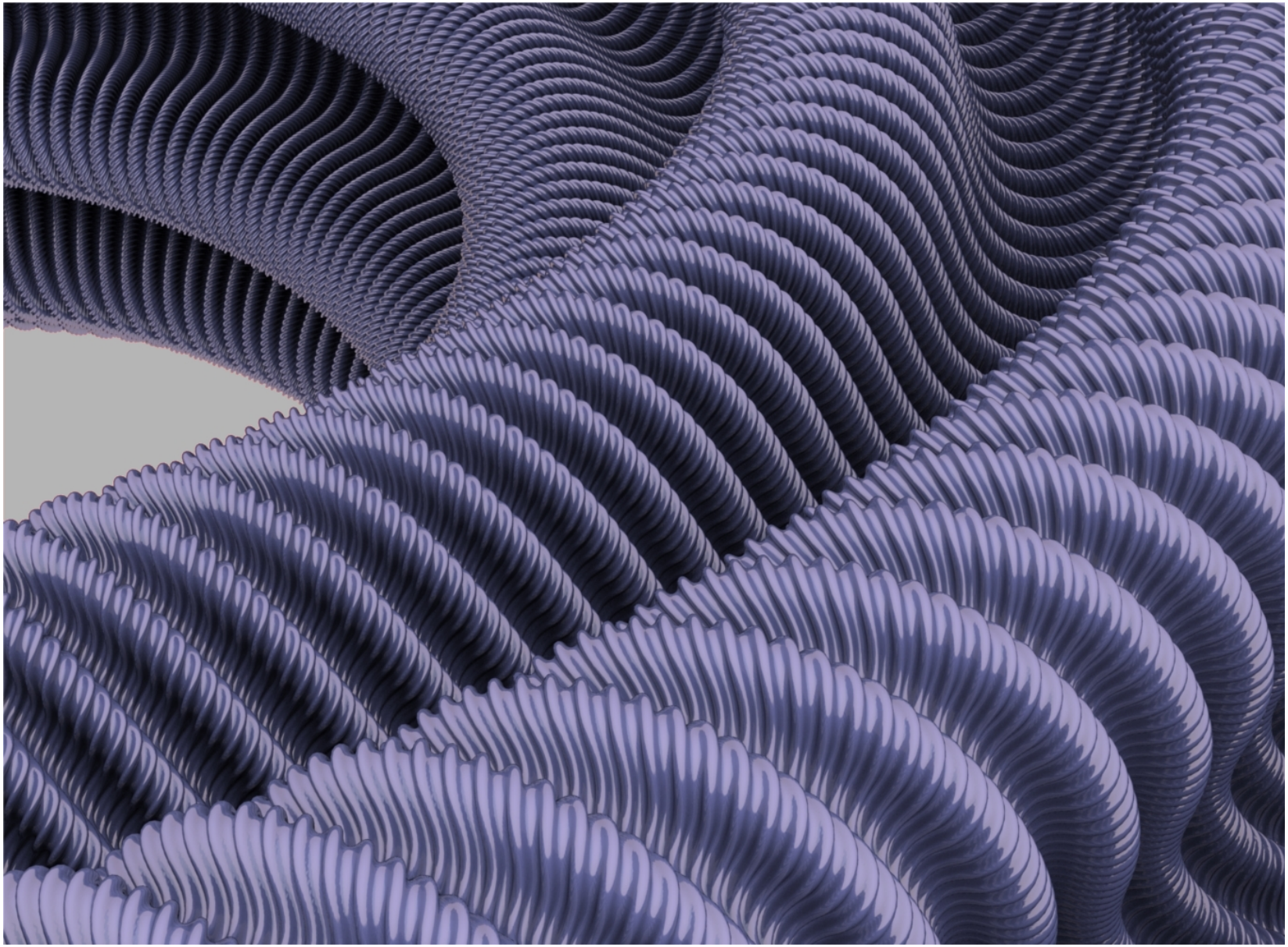


Image : Hevea Team

De nouveau un CP dans la première direction

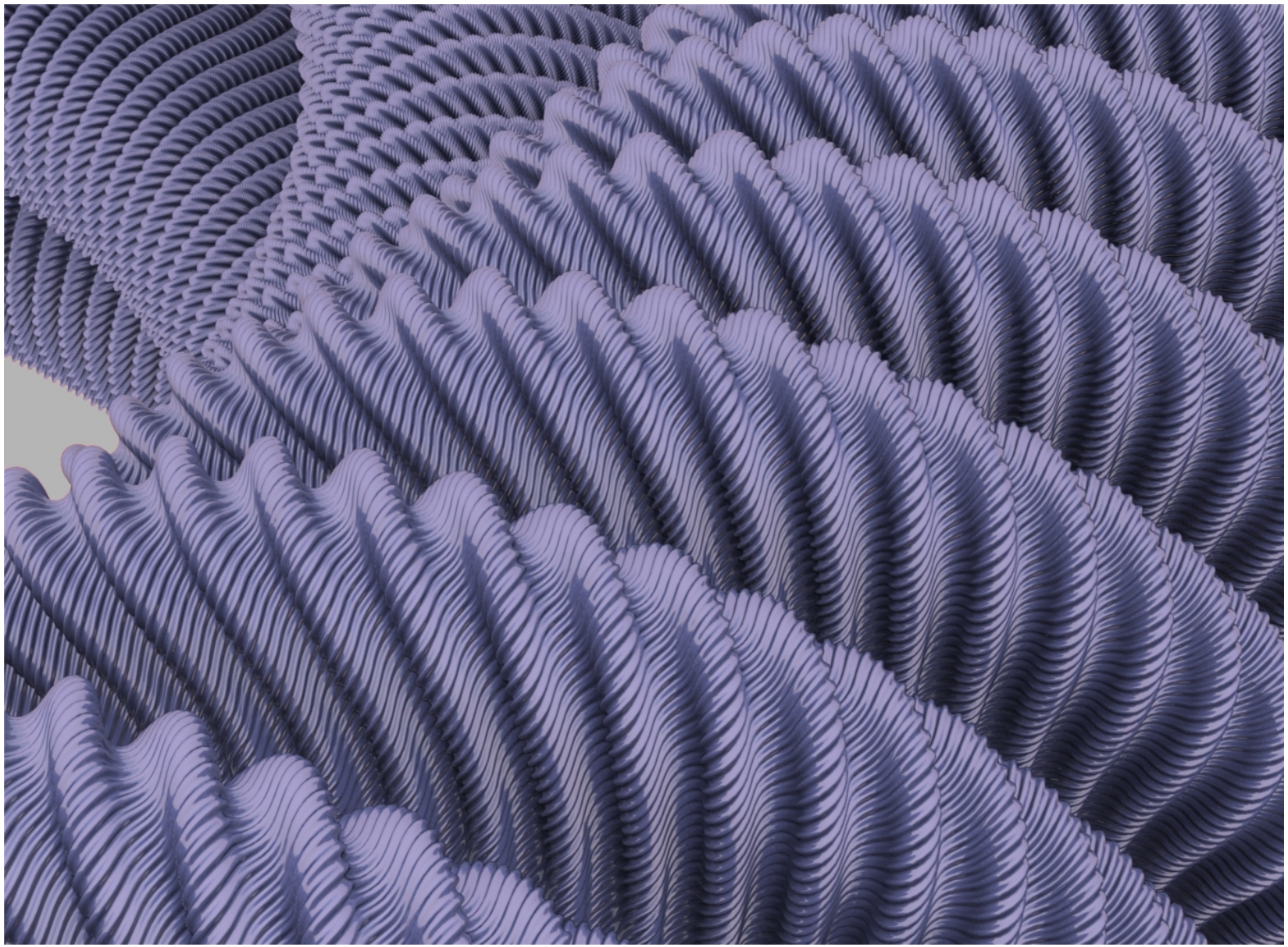


Image : Hevea Team

Et ainsi de suite... jusqu'au tore plat

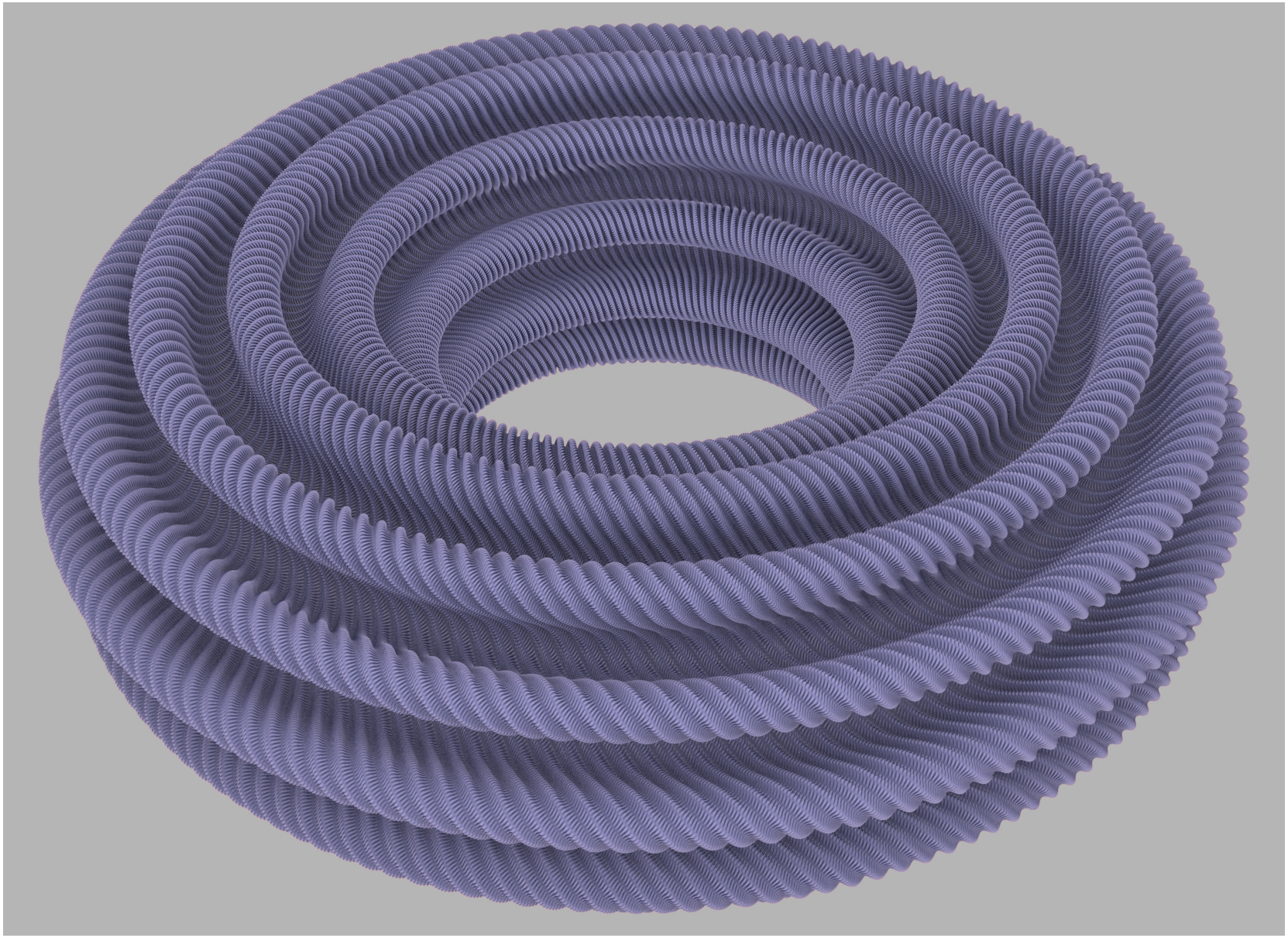


Image : Hevea Team

Constructions explicites par l'équipe Hévéa

Roland Denis

Francis Lazarus

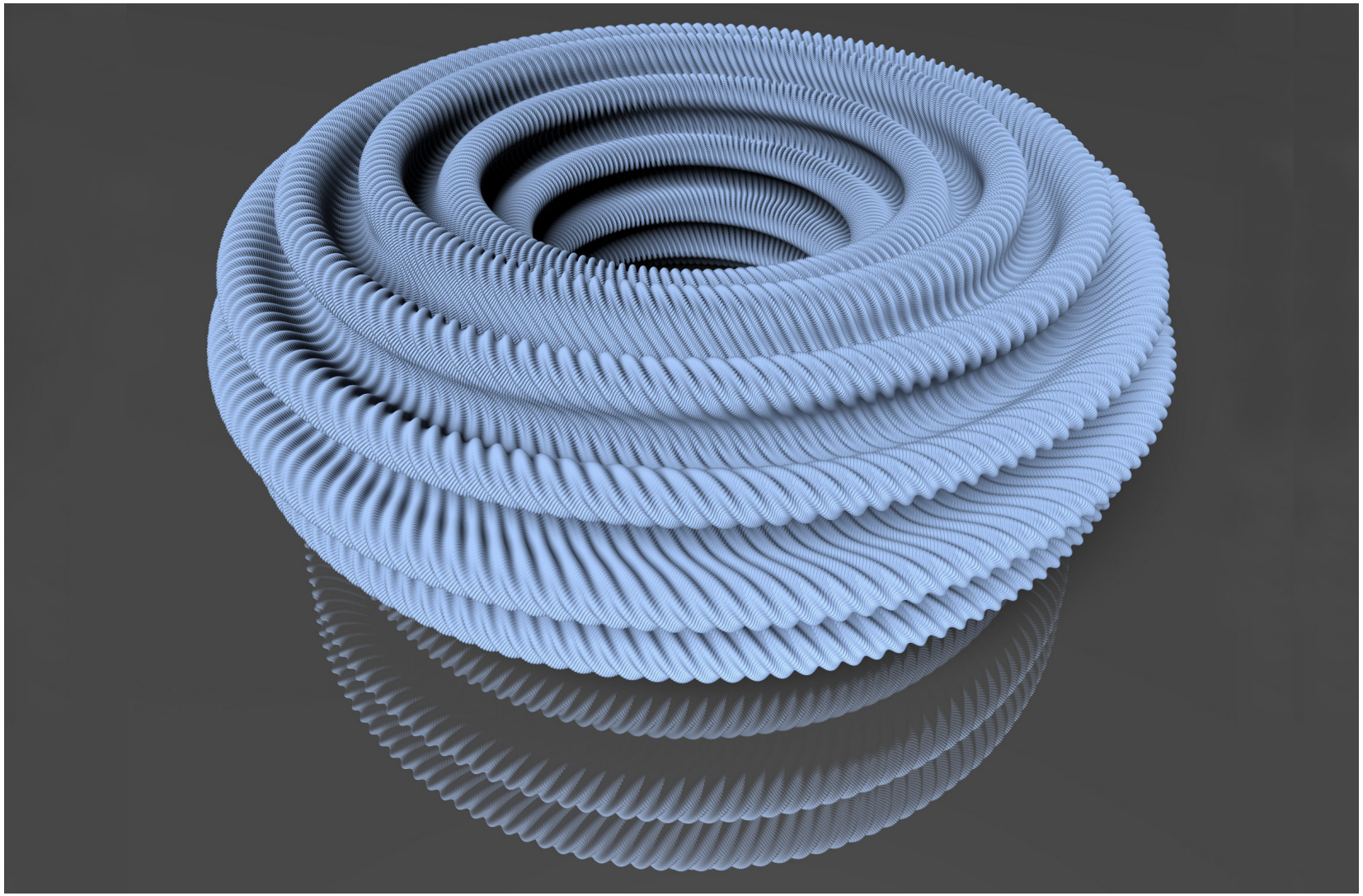
Mélanie Theillière

Boris Thibert

(composition actuelle)

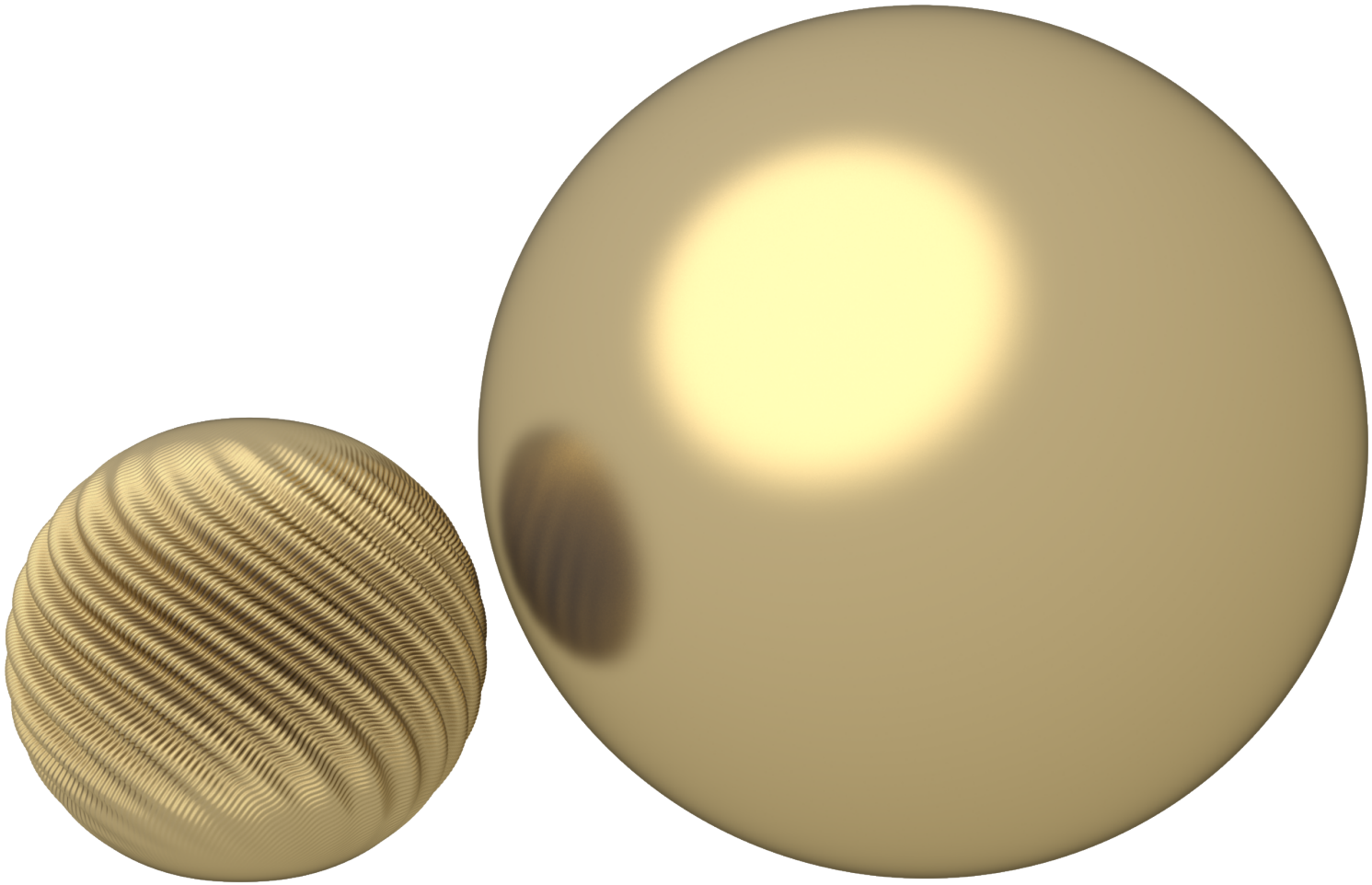
HEVEA : H-principE, Visualisation Et Applications

Constructions explicites (2012)



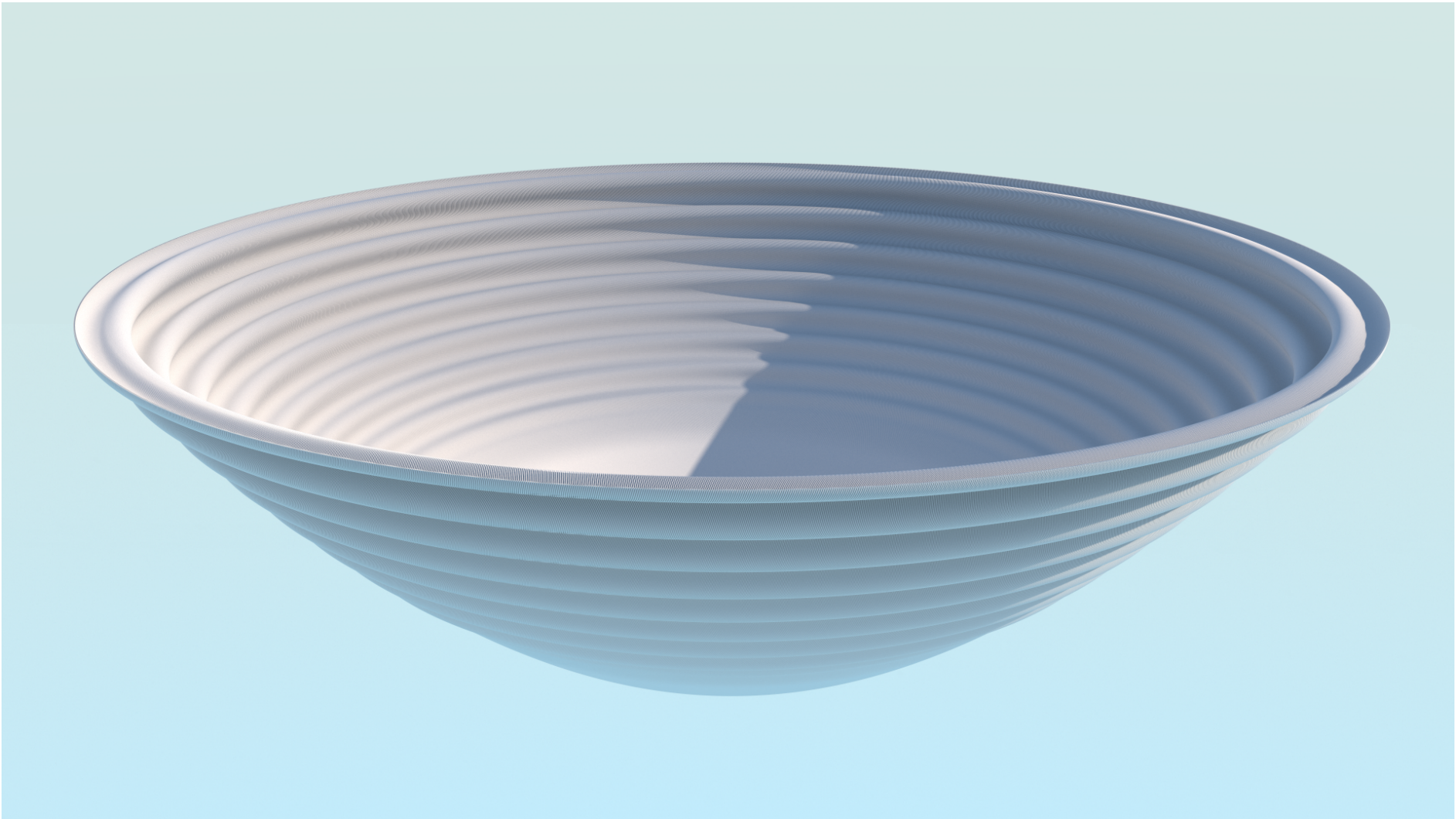
Un tore plat carré, Équipe Hévéa, 2012

Constructions explicites (2017)



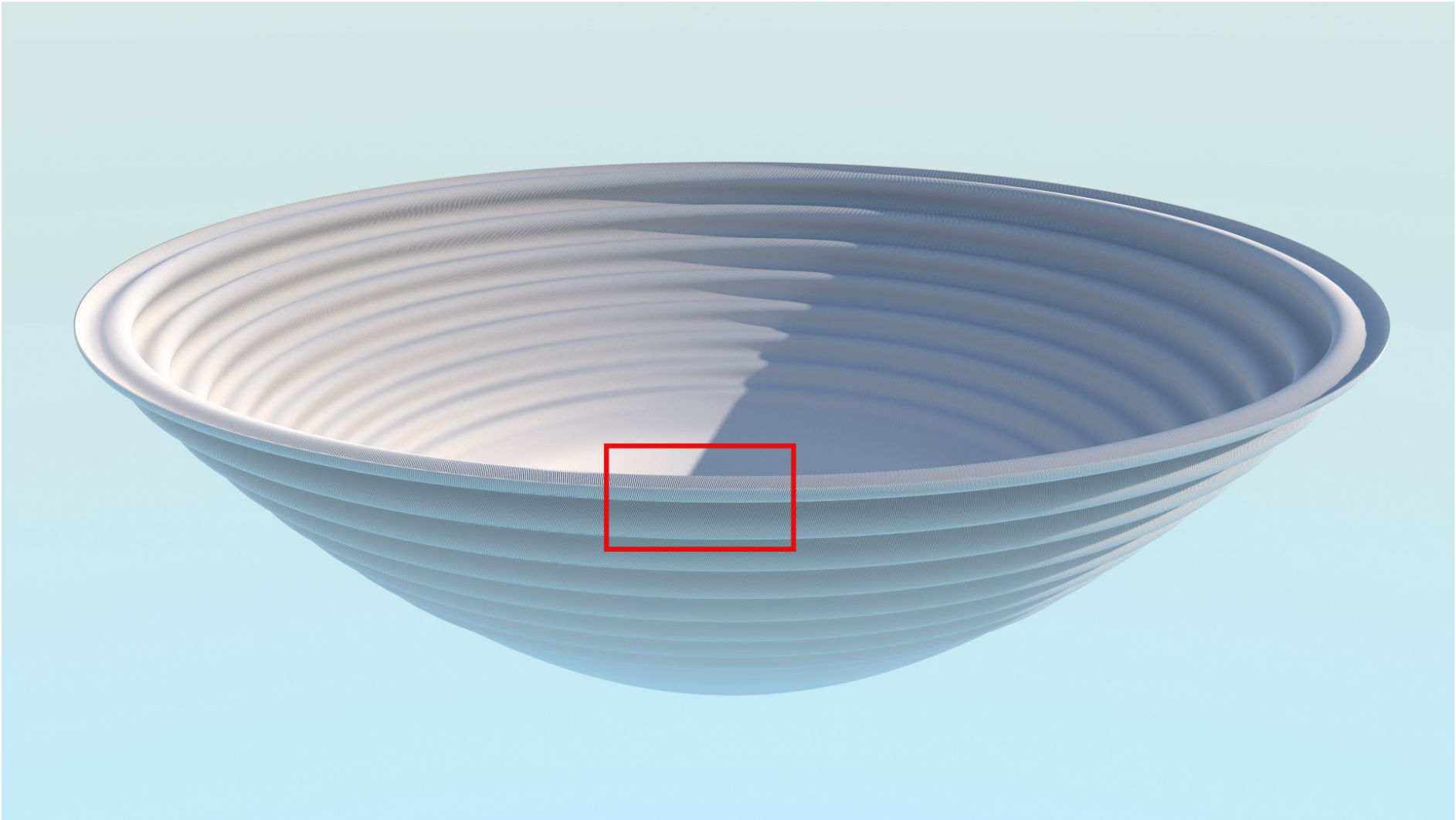
Une sphère réduite, Équipe Hévéa, 2017

Constructions explicites (2022)



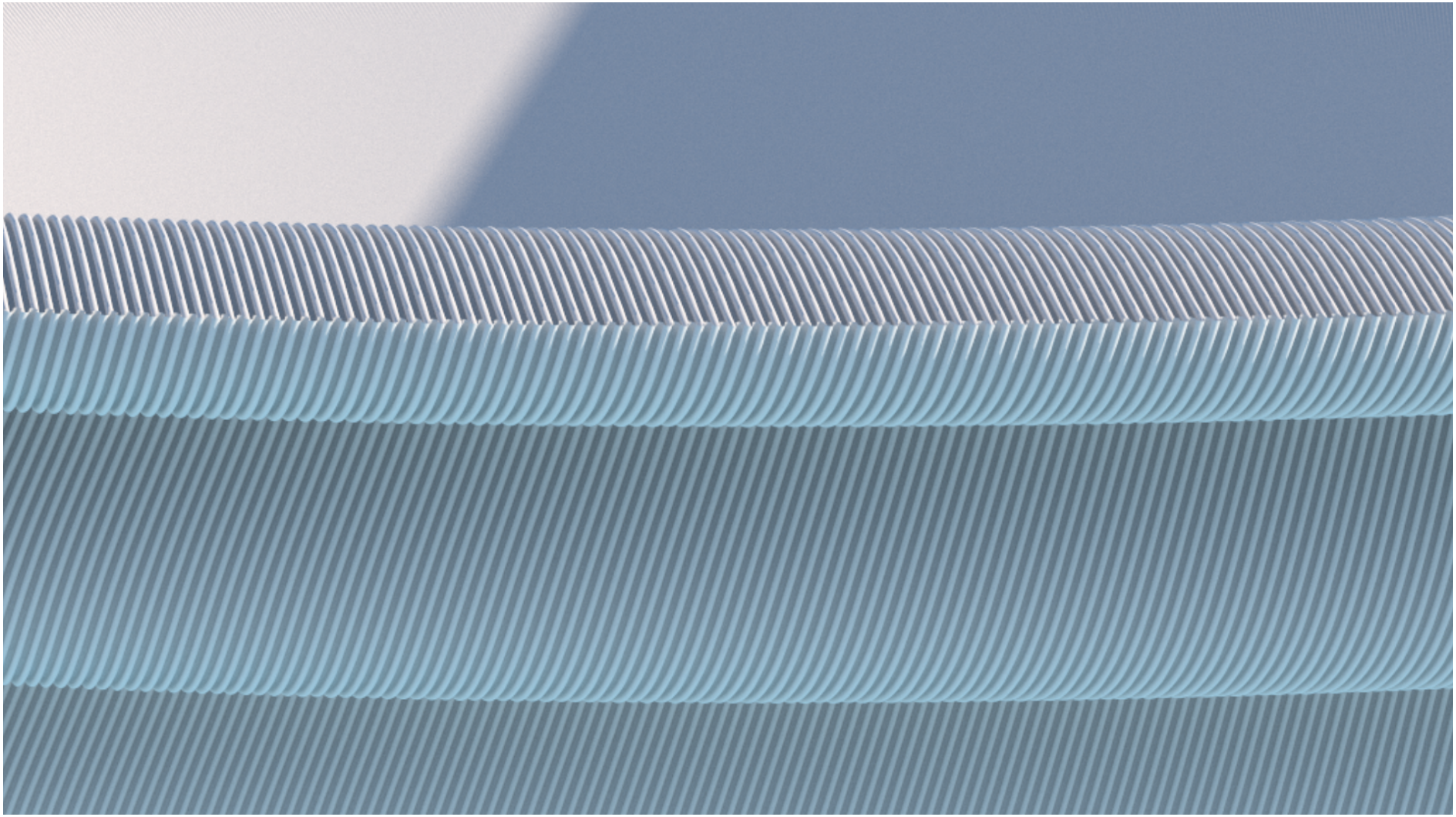
Un espace hyperbolique, Équipe Hévéa, 2022

Plus d'images !



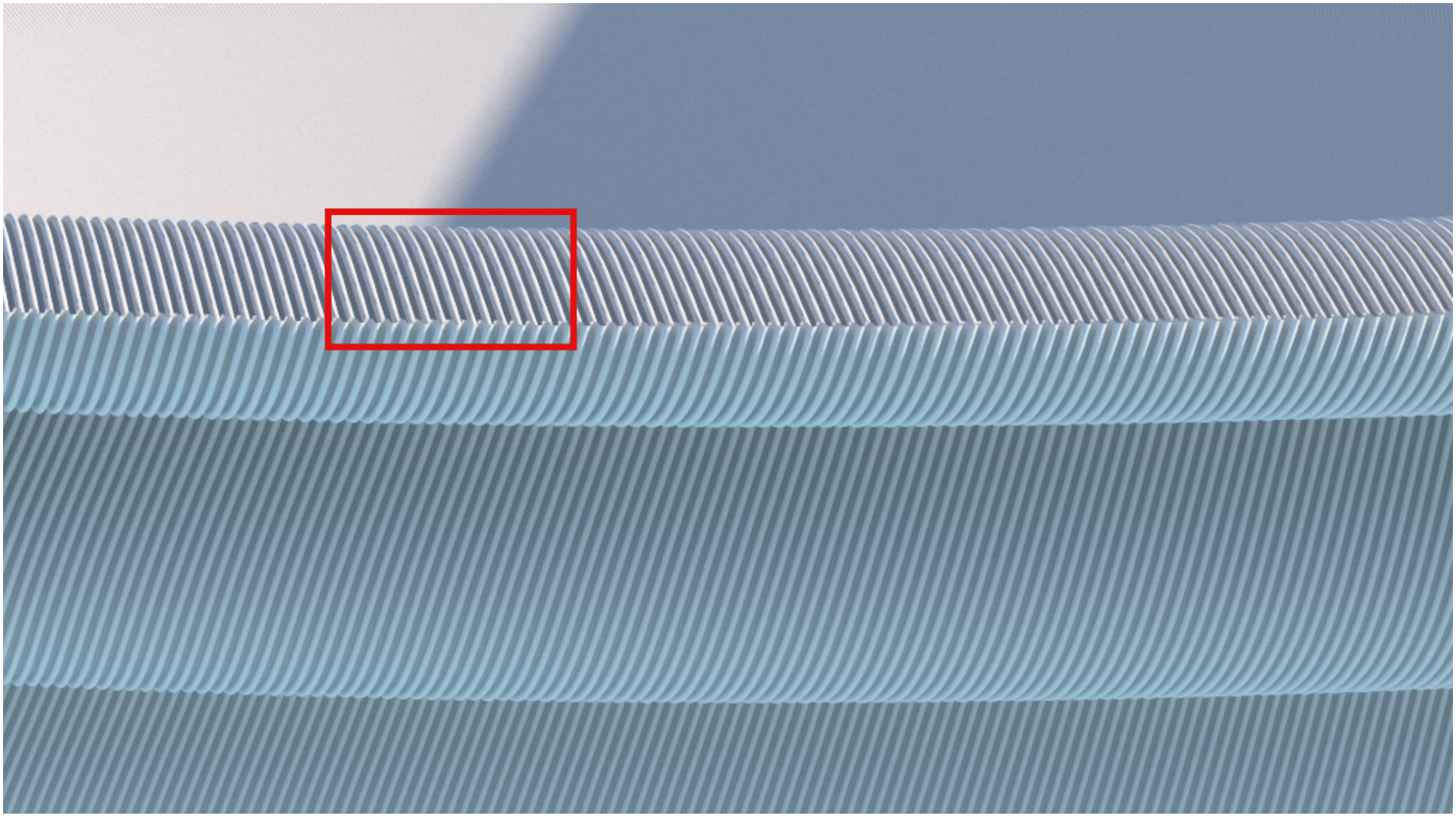
Une construction explicite d'un plongement isométrique de $\mathbb{H}^2$ dont l'ensemble limite est β-hölder pour tout $0 < \beta < 1$. $N_{1,1} = 20$.

Plus d'images !



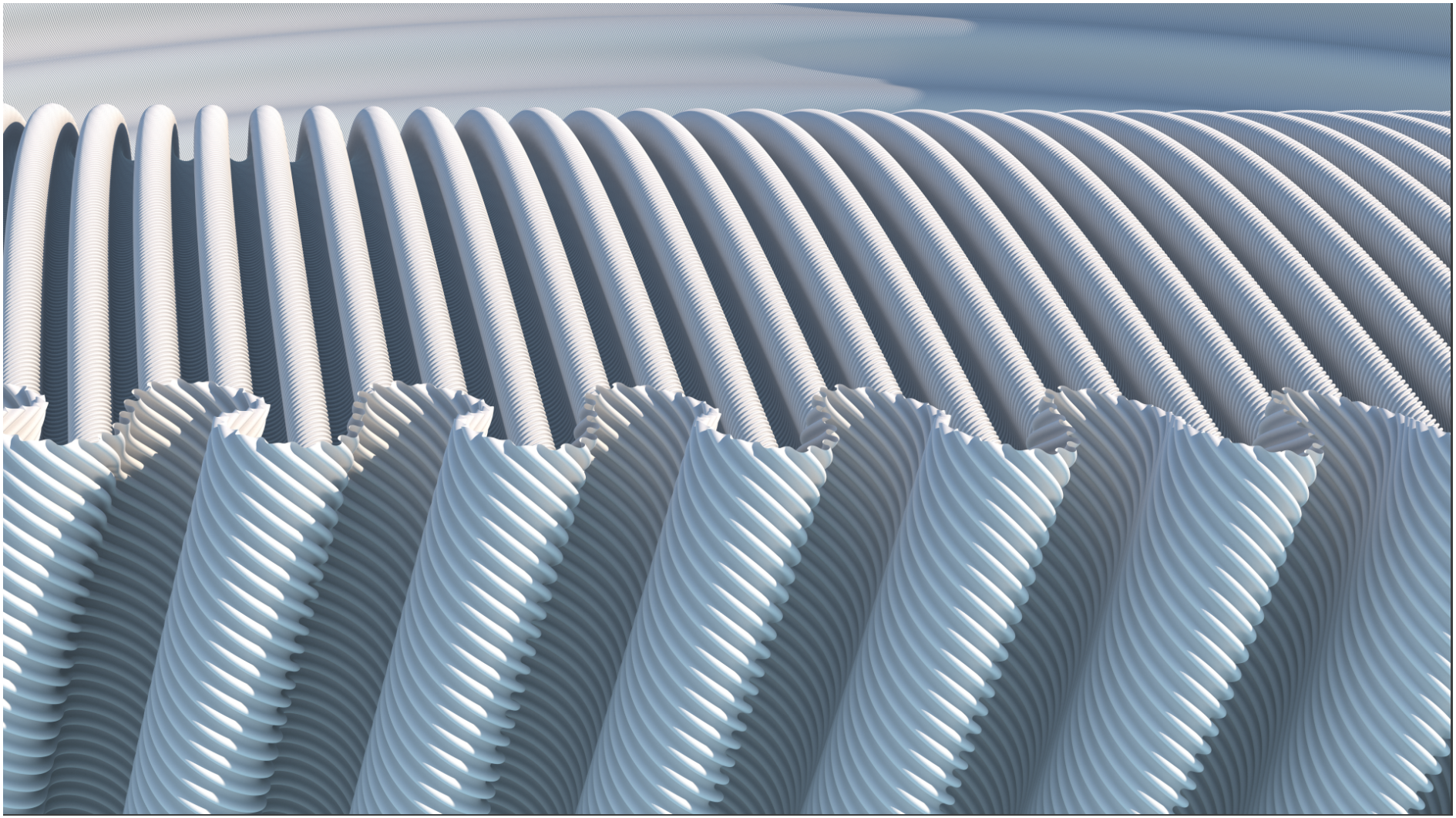
Un premier agrandissement rendant visible la seconde couche de corrugations, $N_{1,2} = 400$.

Plus d'images !



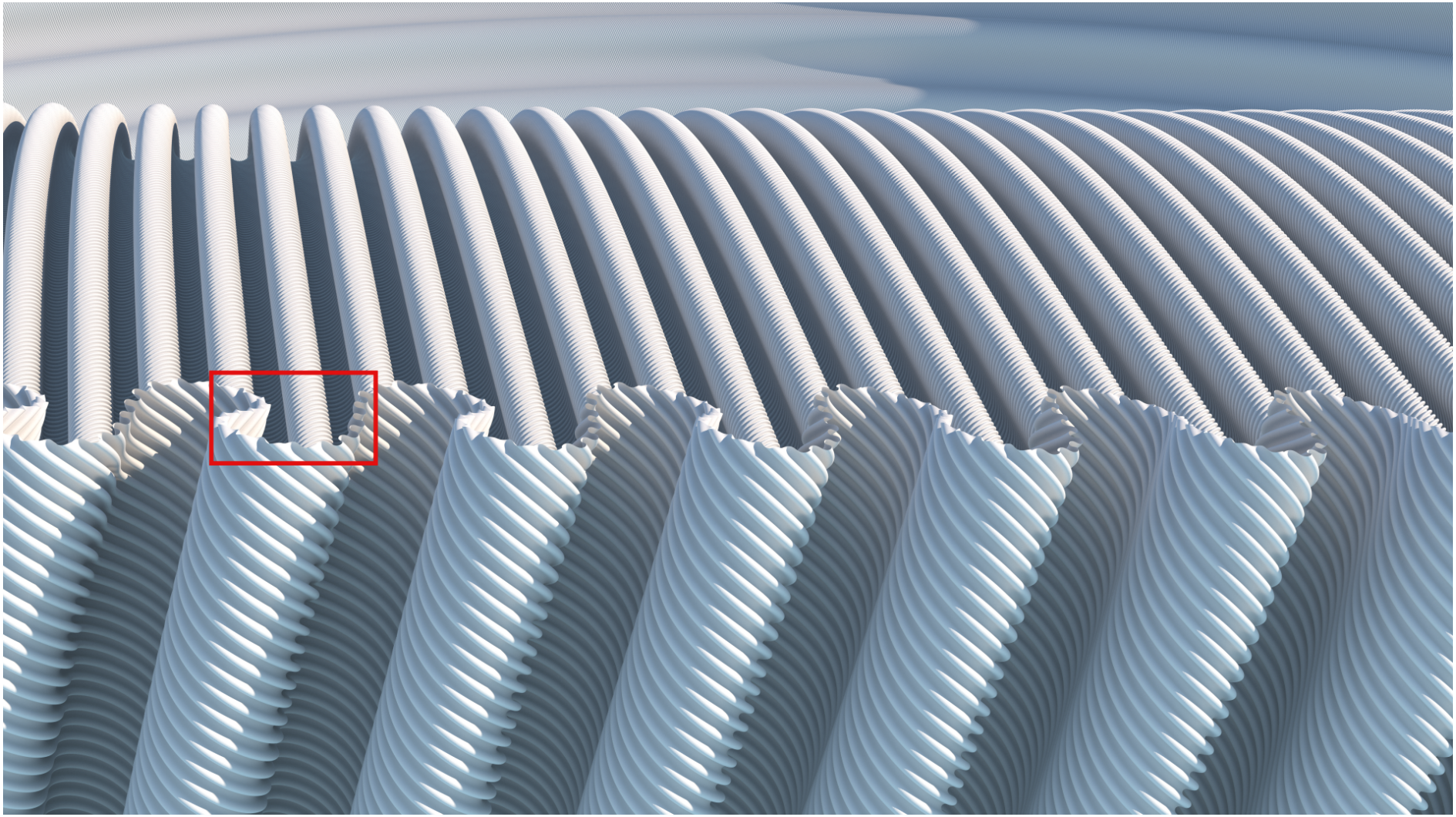
Un premier agrandissement rendant visible la seconde couche de corrugations, $N_{1,2} = 400$.

Plus d'images !



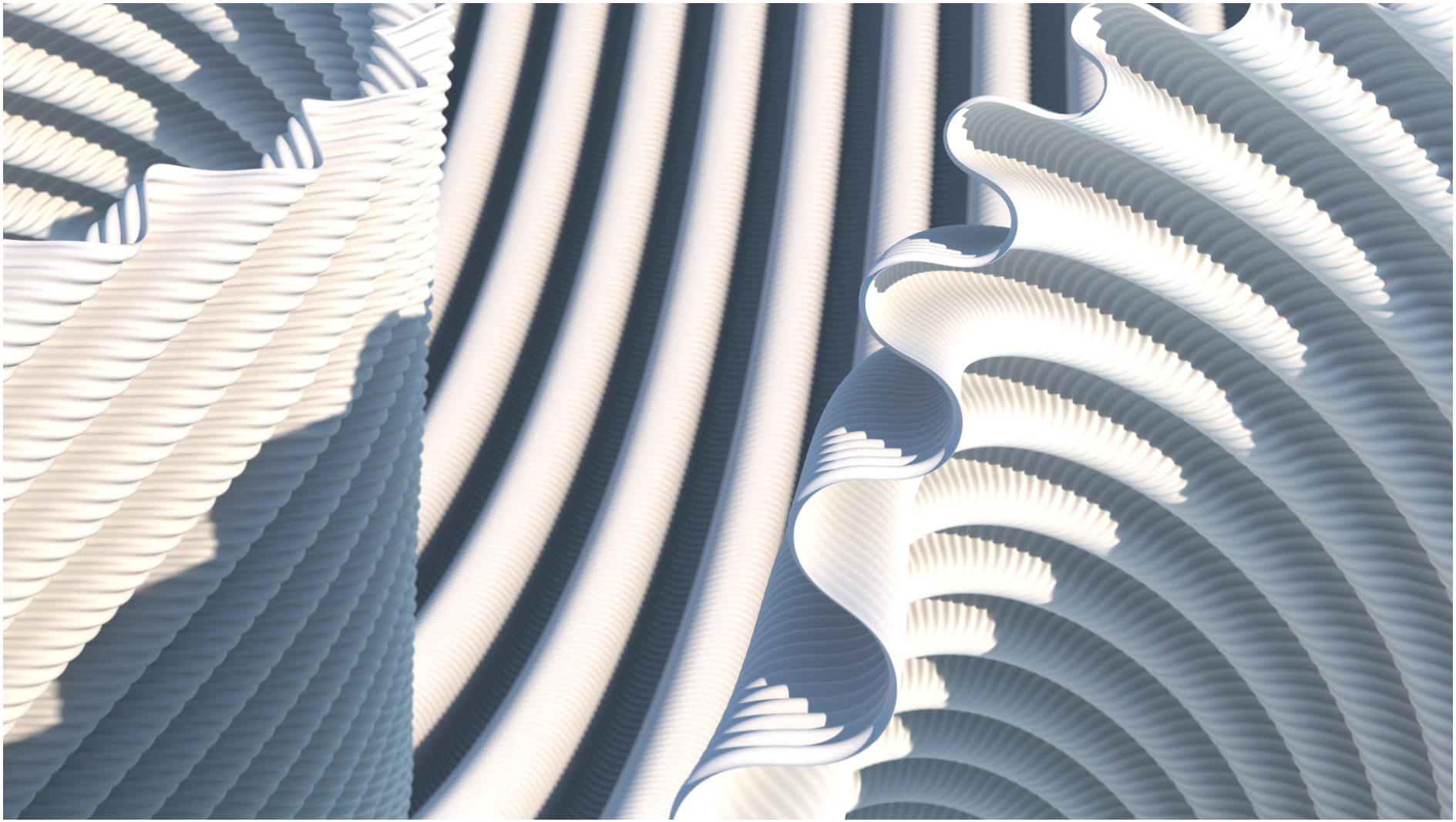
Un autre agrandissement révèle que l'ensemble limite n'est pas une courbe plane, $N_{1,3} = 8000$.

Plus d'images !



Un autre agrandissement révèle que l'ensemble limite n'est pas une courbe plane, $N_{1,3} = 8000$.

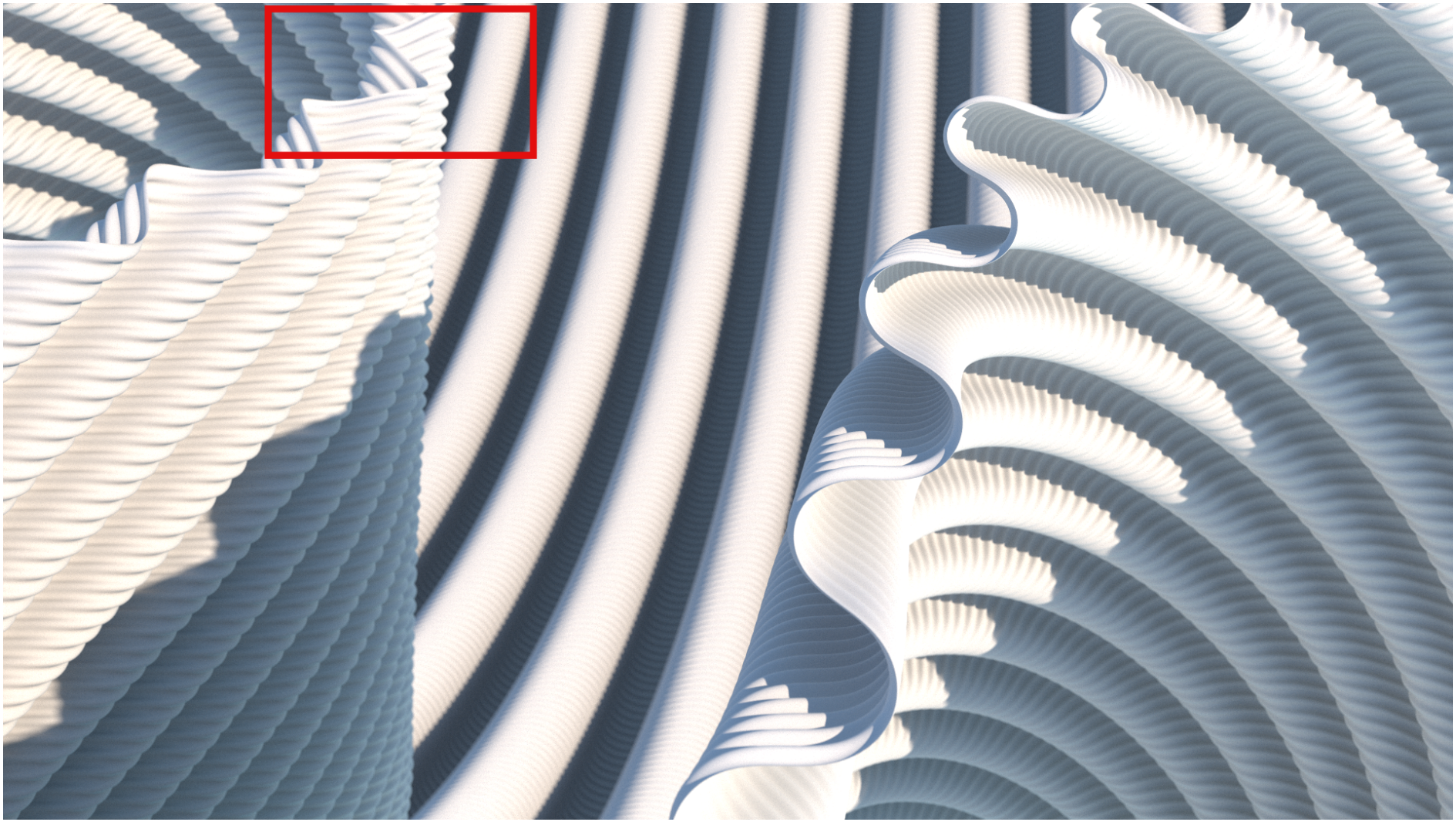
Plus d'images !



L'écriture formelle de la courbe limite est similaire à une série de Fourier lacunaire,

$N_{2,1} = 160000.$

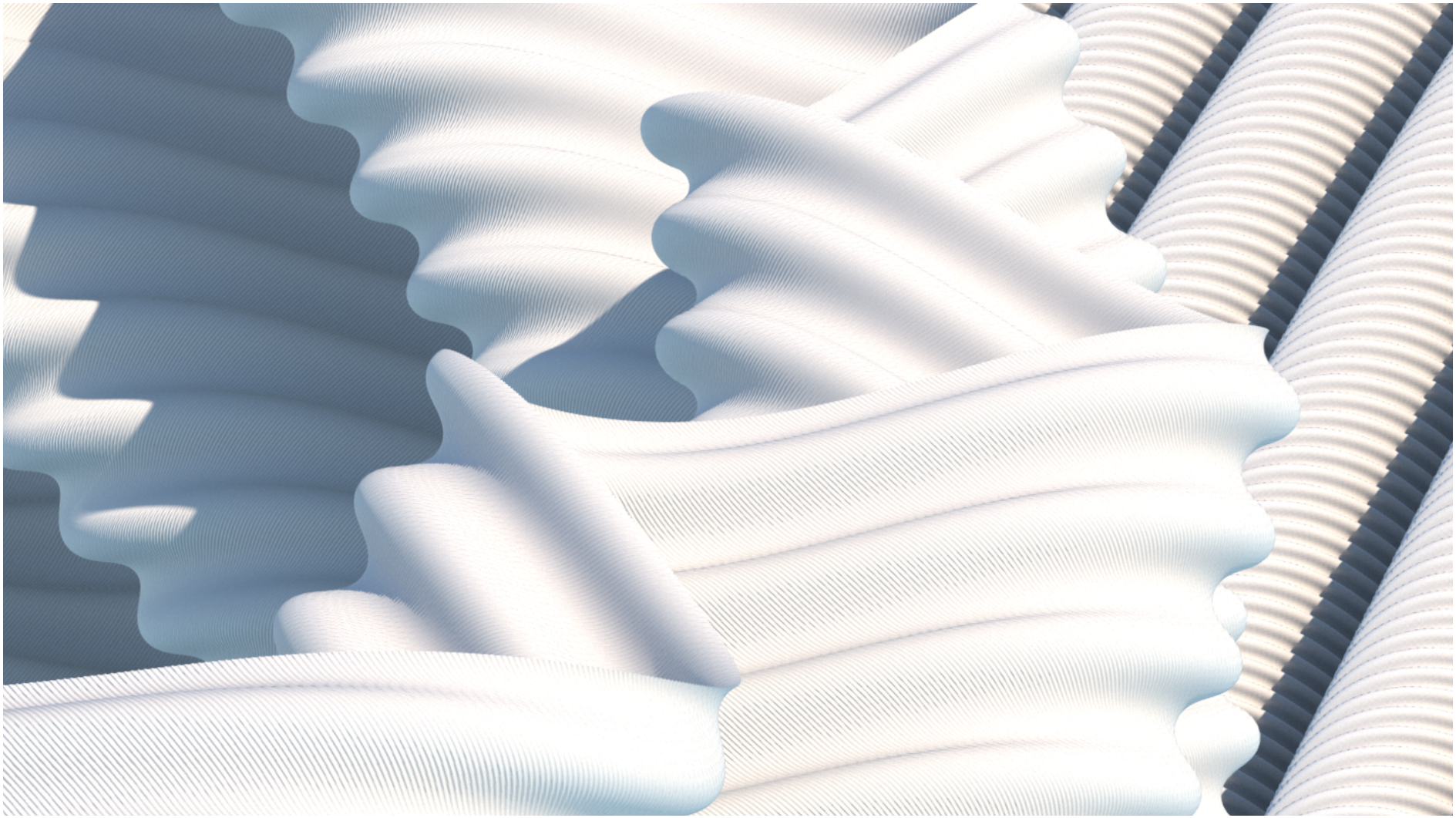
Plus d'images !



L'écriture formelle de la courbe limite est similaire à une série de Fourier lacunaire,

$N_{2,1} = 160000.$

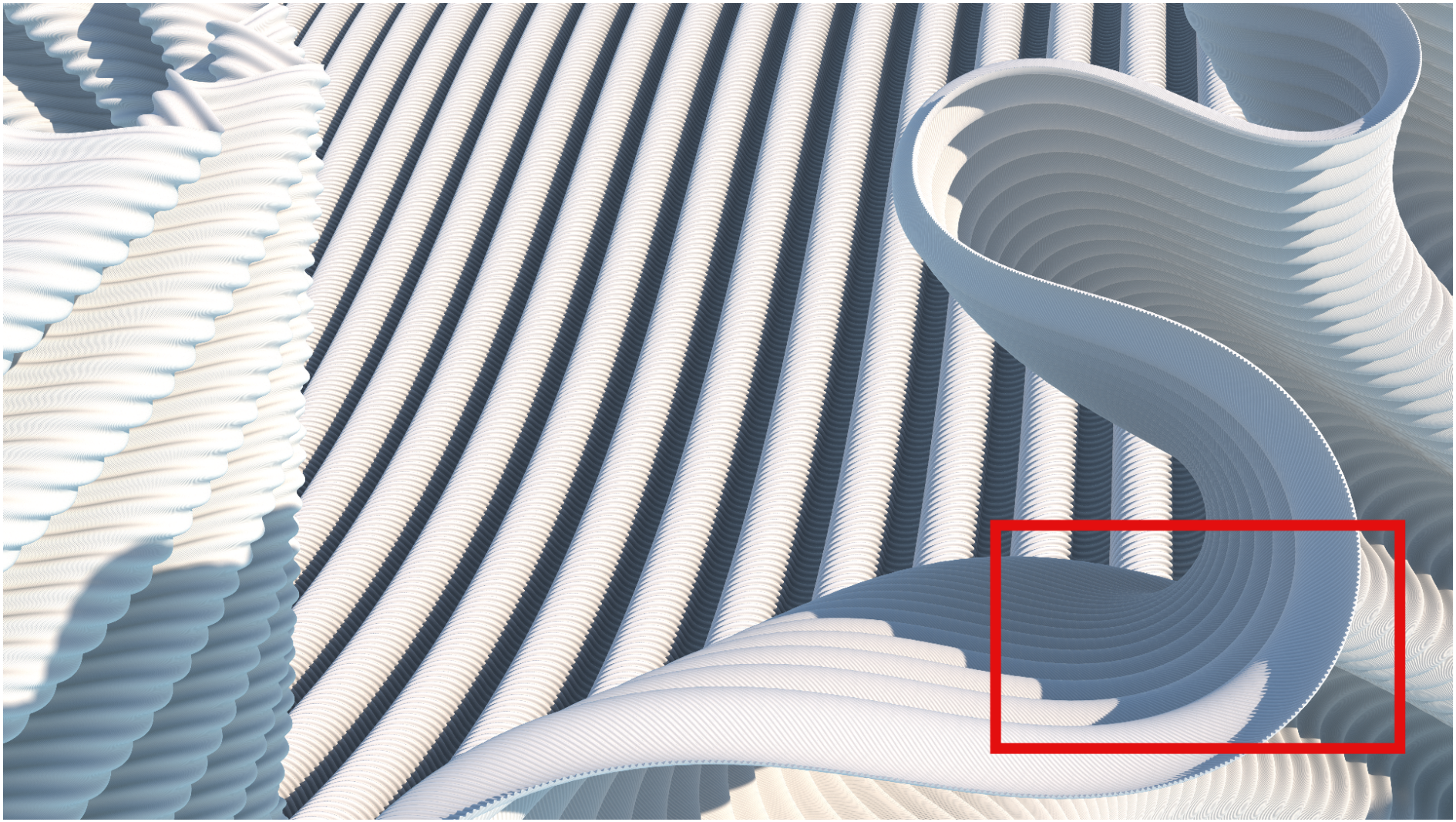
Plus d'images !



Tout point à l'intérieur de la surface est à une distance infinie de tout point du bord,

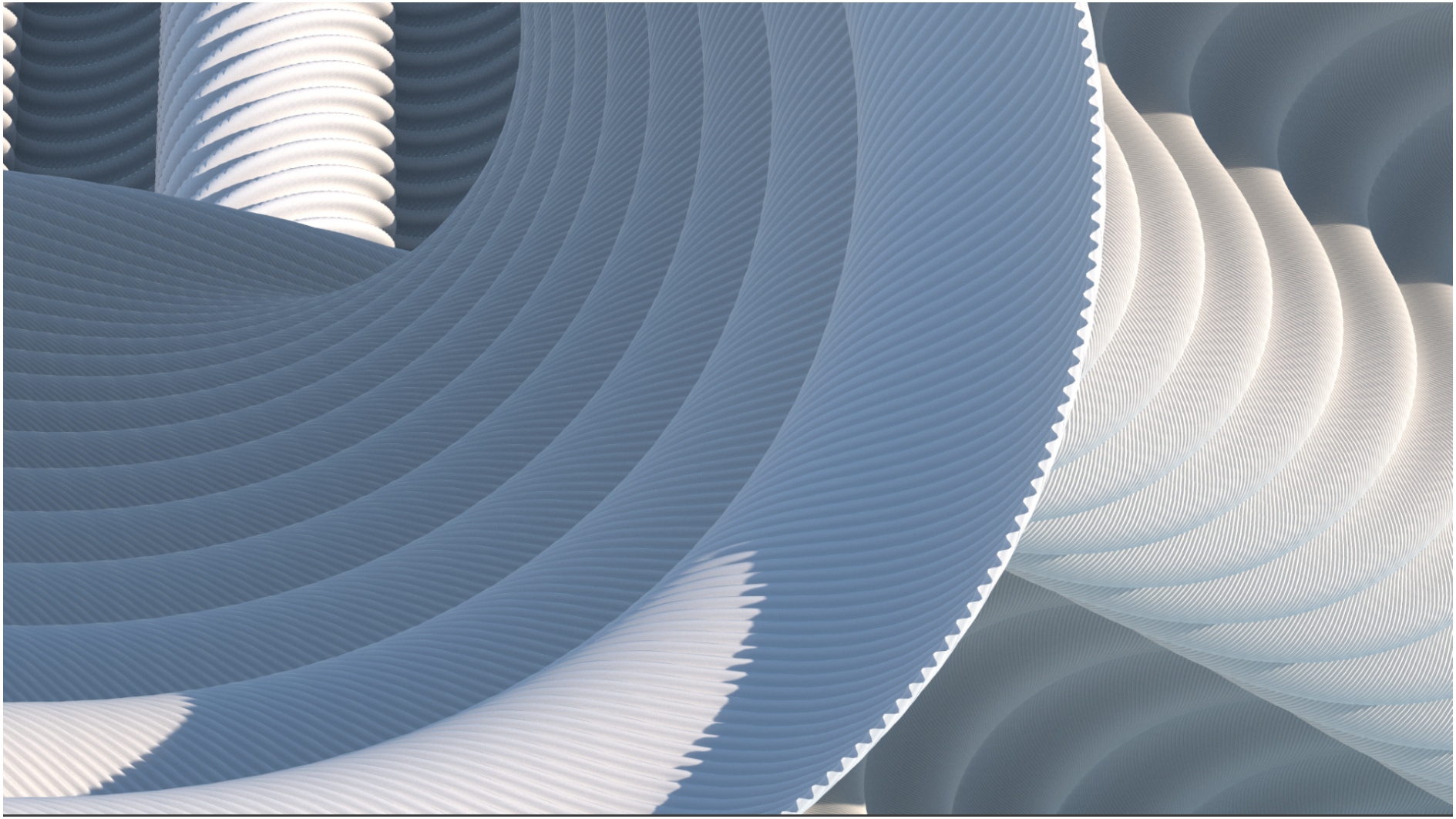
$N_{2,2} = 3200000.$

Plus d'images !



Retour à l'image précédente afin de l'agrandir à un autre endroit.

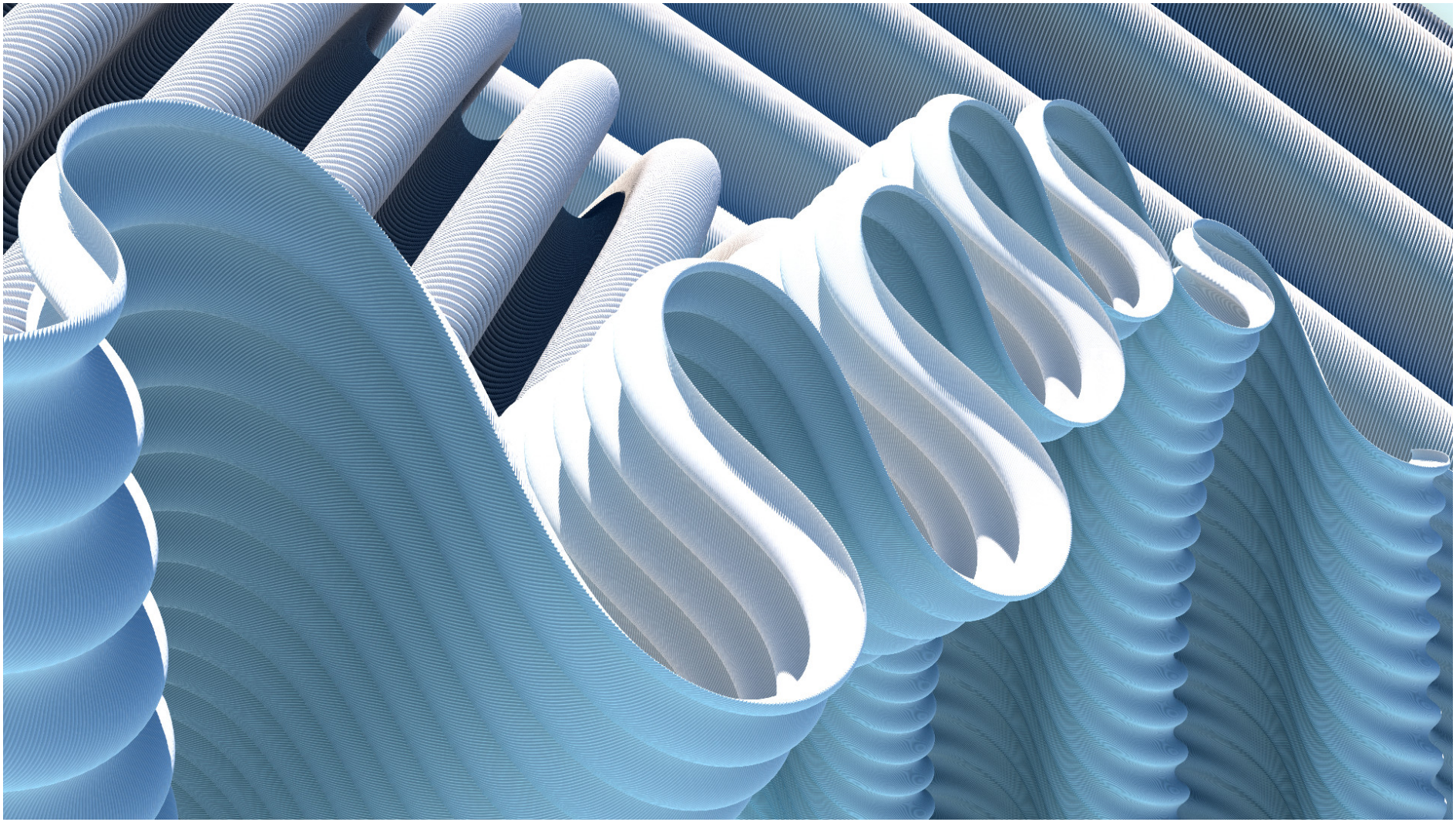
Plus d'images !



L'ensemble limite est un cercle plongé de dimension de Hausdorff = 1,

$N_{2,2} = 3200000$.

Plus d'images !

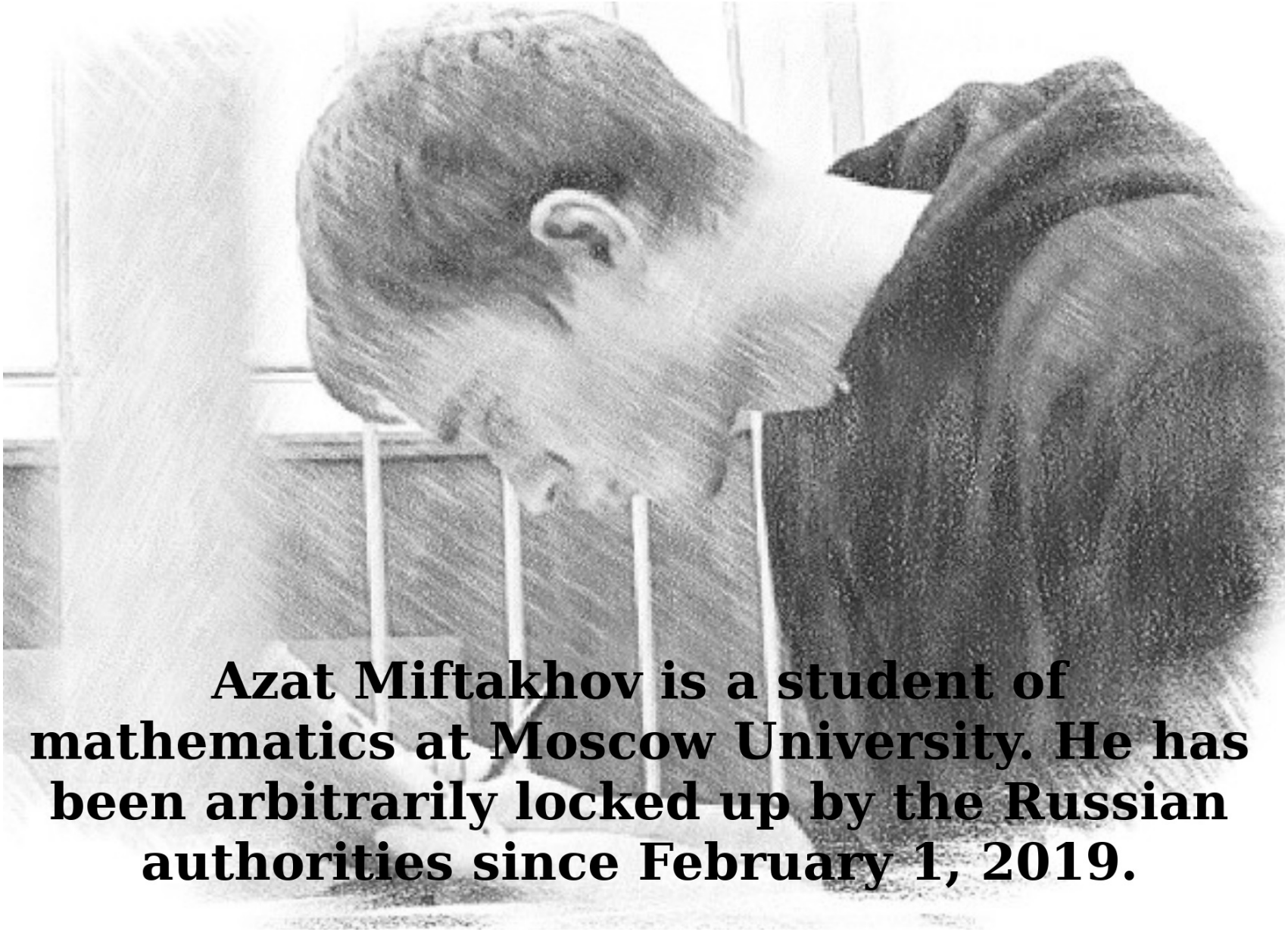


Une vue de l'ensemble limite : l'infini trouve toujours son chemin...

John Nash

Merci pour votre attention !

Azat Miftakhov



Azat Miftakhov is a student of mathematics at Moscow University. He has been arbitrarily locked up by the Russian authorities since February 1, 2019.