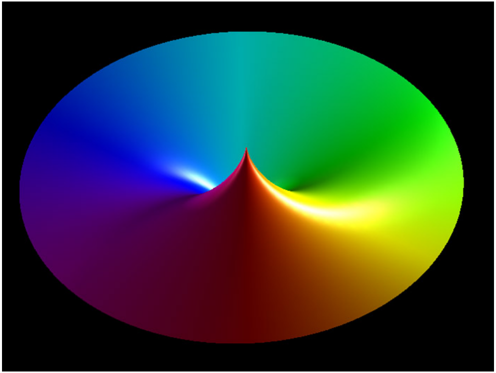
Fonctions de plusieurs variables II

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le programme

Partie I : Fonctions (6 semaines)

CM 1.– Coordonnées, topologie
CM 2.– Fonction, graphe, composition
CM 3.– Limite, différentielle
CM 4.– Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5.– Hessienne, Taylor, extrema
CM 6.– Intégrales simples et doubles
CM 7.– Intégrales triples et applications

Le programme

Partie II : Champs de vecteurs (5 semaines)

CM 8.– Champs de vecteurs et lignes de champs
CM 9.– Champs conservatifs
CM 10.– Champs incompressibles
CM 11.– Circulation sur les courbes
CM 12.– Flux et surfaces

Adresses utiles

Deux adresses :

http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Cours_Math2

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

Chapitre 2
Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre :

1. Limites et continuité
2. Dérivées partielles
3. Dérivée directionelle
4. Gradient
5. Différentielle
6. Jacobienne
7. Resumé sur les dérivées
8. Règle de la chaîne
9. Hessienne
10. Taylor
11. Extrema locaux

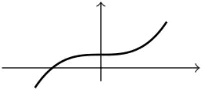
Limite, continuité

Rappel – Soit $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, on dit que :

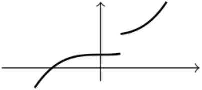
- f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ceci signifie que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

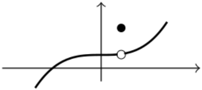
$$\|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \epsilon.$$



continue



$\lim\limits_{gauche} \neq \lim\limits_{droite}$



$\lim\limits_{gauche} = \lim\limits_{droite} \neq f(a)$

Limite, continuité

Définition.– Soit

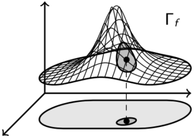
$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

une fonction de plusieurs variables.

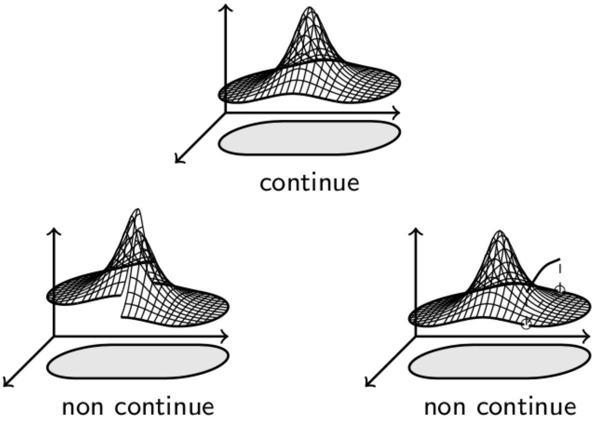
- f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ceci signifie que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \epsilon.$$



Limite, continuité



Un théorème

Théorème.– *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues sont continues.*

Quelques fonctions continues.– Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$ et toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues par composition ou combinaisons de fonctions à une variable qui sont continues (notamment les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques) sont continues sur leur domaine de définition.

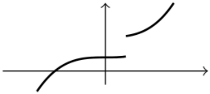
Dérivées partielles

Définition (rappel).– Soient $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et $a \in D_f$. Si la limite

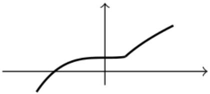
$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie, on l'appelle la DÉRIVÉE de f en a. On dit alors que f est DÉRIVABLE EN a. La fonction f est DÉRIVABLE SUR $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

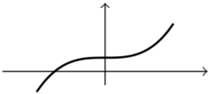
Nota.– Une fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse.



non continue



continue, non dérivable



dérivable

Dérivées partielles

Définition.– Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $a = (a_1, ..., a_n) \in D_f$.

• Les DÉRIVÉES PARTIELLES DE f AU POINT a sont les limites

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

où $i = 1, ..., n$ (si ces limites existent et donnent des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ sans composantes $\pm\infty$).

• Les DÉRIVÉES PARTIELLES DE f sont les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \; x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

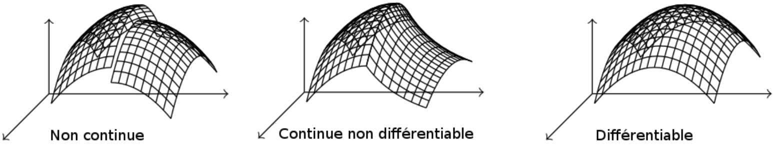
pour $i = 1, ..., n$ définies sur l'ensemble D de points x où les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existent.

Dérivées partielles

• La fonction f est (CONTINÛMENT) DIFFÉRENTIABLE SUR $D \subset D_f$, ou DE CLASSE C^1 SUR D, si toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

existent et sont des fonctions continues en tout point $x \in D$.



Exemples

Exemple 1.– La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(x, y) \mapsto xy^2 + 3x$$

est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$$

sont continues.

Exemple 2.– L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

sont continues.

Exemples

Exemple 3.– L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto \varphi^2 + r \sin\theta$$

est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi, \theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi, \theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta$$

sont continues.

Dérivées directionnelles

Définition.– Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (continûment) différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE DE f DANS LA DIRECTION $\vec{v}$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} \partial_{\vec{v}} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(x) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{array}$$

• La i-ème dérivée partielle se confond donc avec la dérivée directionnelle dans la direction du vecteurs $\vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ où le nombre 1 est en $i$ème position :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f$$

Exemples

Exemple 1.– La dérivée directionnelle de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy^2 + 3x \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y)$ et au point $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = (3 + y^2)X + 2xyY$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

Exemples

Exemple 2.– La dérivée directionnelle de l'application

$$f = (f_1, f_2) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (xy^2 + 3x, yz^2) \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$ et au point $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = ((3 + y^2)X + 2xyY, z^2 Y + 2zyZ)$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix}$$

Exemples

Exemple 3.– La dérivée directionnelle de l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\varphi,\theta) & \longmapsto & \varphi^2 + r\sin\theta \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$ et au point $a = (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\partial_{(X,Y,Z)} f(r,\varphi,\theta) = \sin\theta\ X + 2\varphi\ Y + r\cos\theta\ Z$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

Croissance et décroissance

Théorème.– Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur D_f, $x \in D_f$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

• Si $\partial_{\vec{v}} f(x) > 0$ alors f est croissante au point x dans la direction de $\vec{v}$

• Si $\partial_{\vec{v}} f(x) < 0$ alors f est décroissante au point x dans la direction de $\vec{v}$.

Exercice

Énoncé.– La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$ est-elle croissante ou décroissante au point $(3,1)$ et dans les directions $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ $(1,-2)$?

Réponse.– Pour tout vecteur $\vec{v} = (X,Y)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \ (y^2+3)\,X + 2xy\;Y$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = \ 4\,X + 6\;Y$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \Rightarrow f$ est croissante dans la direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \Rightarrow f$ est croissante dans la direction $(1,2)$

Exercice

- $\partial_{(1,-1)}f(3,1) = -2 \Rightarrow f$ est décroissante dans la direction $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)}f(3,1) = -8 \Rightarrow f$ est décroissante dans la direction $(1,-2)$

Énoncé (suite).– Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?

Réponse.– Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Exercice

Croissance. – Puisque $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$, on recalcule

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

De même $\|(1,2)\| = \sqrt{3}$ conduit à

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2)} f(3,1) = \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

Or $\frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{3}}$ car $(10\sqrt{3})^2 = 300 < (16\sqrt{2})^2 = 512$.

Ainsi, au point $(3,1)$, f croît plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

Exercice

Décroissance. – De même, $\|(1,-1)\| = \sqrt{2}$ et $\|(1,-2)\| = \sqrt{3}$, il faut donc calculer

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

et

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-2)} f(3,1) = -\frac{8}{\sqrt{3}}$$

On a $-\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{3}}$ car si $(2\sqrt{3})^2 = 12 < (8\sqrt{2})^2 = 128$.

Ainsi, au point $(3,1)$, f décroît plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

Gradient d'une fonction réelle

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1. Le *gradient* de f en un point $x \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) = \vec{\nabla} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\ \vec{e}_n$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ &= \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

Gradient d'une fonction réelle

Remarque.– Le gradient de f est donc une fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le symbole $\vec{\nabla}$ se lit « nabla ».

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy^2 + 3x.$$

Le gradient de f vaut

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, y, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(x^2 + z^2).$$

Le gradient de f vaut

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) + \dfrac{2x}{x^2 + z^2} \\ x\cos(xy) \\ \dfrac{2z}{x^2 + z^2} \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$\vec{\nabla} f(0, \pi, 1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Interprétation géométrique

Observation. – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (continûment) différentiable de deux variables. Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x)$ est « orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ » avec $a = f(x)$. Il indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f

Exemple

- Soit $f : B_O(1) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

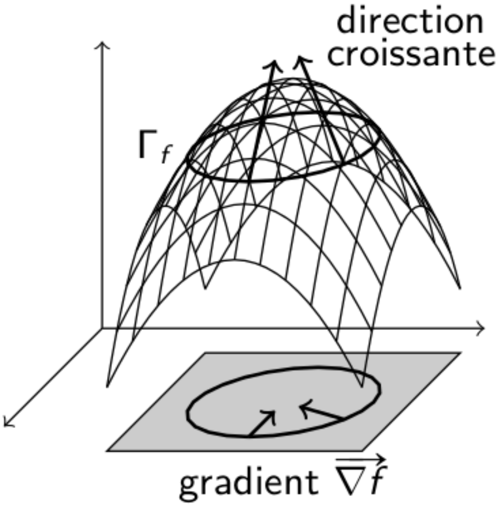
D'une part, les lignes de niveaux $L_a(f)$ de f sont des cercles de rayon $\sqrt{1-a^2}$ avec $a \in]0,1]$. La ligne de niveau $L_1(f)$ est réduite à un point. La ligne de niveau $L_0(f)$ est vide car f est définie sur la boule ouverte $B_O(1)$.

D'autre part, f est différentiable sur $B_O(1)$ et on a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x, y, a).

Exemple


direction croissante
Γ_f
gradient $\overrightarrow{\nabla} f$

Différentielle

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continûment différentiable. Par définition, pour tout $x \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \partial_\bullet f(x) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(x) \end{array}$$

est linéaire.

Définition.– Cette application linéaire s'appelle la *différentielle* de f au point x. Il est d'usage de la noter df_x.

Soit $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$df_x(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ v_n$$

Différentielle

- Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x \in D$. La différentielle $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire au moyen du gradient de f

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df_x(\vec{v}) = \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle$$

- Soient

$$f = (f_1, ..., f_m) : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

une fonction d'une seule variable et $x \in D$. La différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s'écrit

$$\forall \vec{v} = v\vec{e}_1 \in \mathbb{R}, \quad df_x(\vec{v}) = \Big(f_1'(x)\, v \,, \ldots, \; f_m'(x)\, v \Big)$$

Exemples

• Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x^5$ alors $f'(x) = 2x - 5x^4$ et $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_x(\vec{v}) = (2x - 5x^4)\vec{v}.$$

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y^3 - 7y$ alors pour tout $\vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ la différentielle $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(\vec{v}) = 2xy^3\ X + (3x^2y^2 - 7)\ Y$$

En particulier

$$df_{(x,y)}(2, 1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7 \text{ et } df_{(1,1)}(X, Y) = 2X - 4Y$$

et $df_{(1,1)}(2, 1) = 0$.

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

alors pour tout $\vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ la différentielle $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(\vec{v}) = X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y^2X + 2xyY \\ Y \\ 2xX - 2yY \end{pmatrix}$$

Exemples

• Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix}$$

alors pour tout $\vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$ la différentielle $df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$df_{(x,y,z)}(\vec{v}) = X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y^2X + 2xyY \\ z^3Y + 3yz^2Z \end{pmatrix}$$

Différentielle

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continûment différentiable. L'application

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x & \longmapsto & df_x \end{array}$$

est appelée la *différentielle* de f et elle est notée df.

Notation.– Pour tout $i = 1, ..., n$, on note

$$dx_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} = (v_1, ..., v_n) & \longmapsto & dx_i(\vec{v}) = v_i \end{array}$$

n applications linéaires formant une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Différentielle

• Toute forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'exprime alors comme combinaison linéaire des dx_i :

$$L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$.

Différentielle

- Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors sa différentielle $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $x \in D$ s'écrit

$$df_x = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\ dx_n$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\ dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\ dx_n.$$

Exemples

• Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x^5$ alors $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_x = (2x - 5x^4)dx.$$

En particulier $df_1 = -3\ dx$.

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y^3 - 7y$ alors la différentielle $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)} = 2xy^3\ dx + (3x^2y^2 - 7)\ dy$$

En particulier $df_{(1,1)} = 2\ dx - 4\ dy$.

Exemples

• Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2y^3z - 7yz^2$ alors la différentielle $df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\, dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\, dy + (x^2y^3 - 14yz)\, dz$$

En particulier $df_{(1,1,1)} = 2\, dx - 4\, dy - 13\, dz$

Exercices

Énoncé.– *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$.*

i) Déterminer D.

ii) Déterminer la différentielle en tout point $(x, y) \in D$.

iii) Calculer $df_{(2,0)}$ en les vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1)$ et $\vec{u} = (3, -3)$.

Réponse.– i) On doit avoir $1 - x^2 + 5y > 0$ ainsi

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 + 5y > 0\right\}$$

$=$ portion du plan au-dessus de la parabole

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Exercices

ii) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy \\ &= \frac{-2x}{1 - x^2 + 5y}\, dx + \frac{5}{1 - x^2 + 5y}\, dy \end{aligned}$$

iii) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\, dx + \frac{5}{1-4}\, dy = \frac{4}{3}\, dx - \frac{5}{3}\, dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{i}) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = \tfrac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{j}) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\tfrac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1, 1) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3, -3) = \tfrac{4}{3}\, 3 - \tfrac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– *On note (x, y, z), (ρ, φ, z) et (r, φ, θ) les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que*

$$(\rho, \varphi) \in [0, \infty[\times[0, 2\pi[\longmapsto \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

et

$$(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi] \longmapsto \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Exercices

Montrer que

$$i)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi \\ dz = dz \end{cases}$$

$$i')\ \begin{cases} d\rho = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy \\ dz = dz \end{cases}$$

Formules de passage « cartésiennes $\longleftrightarrow$ cylindriques »

Exercices

$$ii)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi\ \sin\theta\ dr - r\sin\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\ d\theta \\ dy = \sin\varphi\ \sin\theta\ dr + r\cos\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\sin\varphi\ \cos\theta\ d\theta \\ dz = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

$$ii')\ \begin{cases} dr = \cos\varphi\ \sin\theta\ dx + \sin\varphi\ \sin\theta\ dy + \cos\theta\ dz \\ r\sin\theta\ d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ rd\theta = \cos\varphi\ \cos\theta\ dx + \sin\varphi\ \cos\theta\ dy + \sin\theta\ dz \end{cases}$$

Formules de passage « cartésiennes $\longleftrightarrow$ sphériques »

Exercices

$$(iii)\left\{\begin{aligned} dr &= \sin\theta\ d\rho + \cos\theta\ dz \\ d\varphi &= d\varphi \\ rd\theta &= \cos\theta\ d\rho - \sin\theta\ dz \end{aligned}\right.$$

$$(iii')\left\{\begin{aligned} d\rho &= \sin\theta\ dr + \cos\theta\ d\theta \\ d\varphi &= d\varphi \\ dz &= r\cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{aligned}\right.$$

Formules de passage « cylindriques $\longleftrightarrow$ sphériques »

Exercices

Réponse.– Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables « cylindriques → cartésiennes » donne les formules *i*.

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\, dz \\
&= \cos\varphi \; d\rho - \rho \sin\varphi \; d\varphi \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz \\
&= \sin\varphi \; d\rho + \cos\varphi \; d\varphi \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\, dz \\
&= dz
\end{aligned}$$

Les formules i' s'obtiennent en inversant le système. On procède similairement pour les autres formules.

Fin CM 3


MMI
MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
SOIRÉES MATHÉMATIQUES DE LYON
Isabelle Gallagher
RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES : UN PROBLÈME DU MILLÉNAIRE
Lundi 8 février 2016 à 20h
ENS de Lyon
Site René Descartes (Lettres)
Public : Experts + Etudiants
Entrée libre et gratuite
En partenariat avec
MMI
1, PLACE DE L'ÉCOLE
1er ÉTAGE
69007 LYON
OUVERT
LES MERCREDIS
DE 13 H 30 À 18 H
LES SAMEDIS
DE 11 H 30 À 18 H
ENTRÉE
LIBRE
ET GRATUITE
ACCESSIBLE
À TOUS LES PUBLICS
GROUPES & SCOLAIRES
SUR RDV
mmi-lyon.fr
T 04 72 43 11 80
contact@mmi-lyon.fr
facebook.com/mmi.lyon
@MMI_lyon

Fin CM 3


MMI
MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
présente
Lune
Conte scientifique
C'est quoi la Lune ?
Où elle va ?
Pourquoi elle change de forme ?
D'où elle vient ?
Samedi 6 février 2016
2 séances
14h45 et 16h15
Lecture du conte par son auteure Marie Lhuissier
Enfants à partir de 5 ans
GRATUIT POUR TOUS
Entrée libre
Durée : 30 minutes
à la MMI
1 Place de l'École
69007 Lyon
MMI
1, PLACE DE L'ÉCOLE
1er ÉTAGE
69007 LYON
OUVERT
LES MERCREDIS
DE 13 H 30 À 18 H
LES SAMEDIS
DE 11 H 30 À 18 H
ENTRÉE
LIBRE
ET GRATUITE
ACCESSIBLE
À TOUS LES PUBLICS
GROUPES & SCOLAIRES
SUR RDV
mmi-lyon.fr
T 04 72 43 11 80
contact@mmi-lyon.fr
facebook.com/mmi.lyon
@MMI_lyon

Matrice jacobienne

Définition.– La *matrice jacobienne* $J_f(x)$ d'une application différentiable $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et en un point $x \in D$ est la matrice de l'application linéaire $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$J_f(x) := Mat_{\mathcal{B}}(df_x)$$

• Si $(f_1, ..., f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

Matrice jacobienne

- Si $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \ldots + v_n\vec{e}_n$, on a donc

$$df_x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Définition.– Si la matrice jacobienne est carrée ($n = m$), son déterminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle le *jacobien de f*.

- Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on a

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$$

(matrice ligne)

Matrice jacobienne

• Si $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2:\ (u,v)\mapsto h(u,v)=\big(h_1(u,v),h_2(u,v)\big)$, on a

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u,v) = \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}$$

Matrice jacobienne

- Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \; t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a

$$J_g(t) \;=\; \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$

- Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; z \mapsto g(z)$, on a

$$J_g(z) = \big(g'(z)\big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, g(z) \;=\; g'(z) \in \mathbb{R}$$

(matrice colonne = vecteur)

Exemples

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 y$. Alors

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}$$

- Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $h(u, v) = (u^2 v, 3u)$. Alors

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22} \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, h(u, v) = -3u^2$$

- Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (2t, t^3 + 1)$. Alors

$$J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$$

Exemples

• Jacobien du changement de variables en coordonnées polaires :

$$h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

On a

$$J_h(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

Exemples

• Jacobien du changement de variables en coordonnées cylindriques :

$$h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

On a

$$J_h(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi, z) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

Exemples

• Jacobien du changement de variables en coordonnées sphériques :

$$h(r,\varphi,\theta)=(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

On a

$$J_h(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}\, h(r,\varphi,\theta) &= -r^2\cos\theta\left(\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta+\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\right)\\ &\quad -r\sin\theta\left(r\cos^2\varphi\sin^2\theta+r\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta-r^2\sin^3\theta\\ &= -r^2\sin\theta\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y, z) = z \sin(xy).$$

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) \\ xz \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz \cos(xy)\, dx + xz \cos(xy)\, dy + \sin(xy)\, dz$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) & xz \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse.– On a

$$df_{(x,y,z)}(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} Z$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

Récapitulatif

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle de classe C^1, alors :

- les **dérivées partielles** sont des fonctions réelles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}}$$

- Le **gradient** est une fonction vectorielle

$$\boxed{\vec{\nabla} f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

donnée par $$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Récapitulatif

• La **différentielle** est une fonction à valeur dans les formes linéaires

$$\boxed{df : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

donnée par $\quad df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$

• La **jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices à une ligne et n colonnes

$$\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$$

donnée par $\quad J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Récapitulatif

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle de classe C^1 et de composantes $f = (f_1, ..., f_m)$, alors :

- Les **dérivées partielles** sont des fonctions vectorielles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

données par $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$

- Le **gradient** "$\overrightarrow{\nabla} f$" n'est pas défini.

Récapitulatif

• La **différentielle** est une fonction à valeur dans les applications linéaires

$$\boxed{df : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

• La **jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices

$$\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$$

donnée par $J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Règle de différentiation d'une composée

Proposition.– *Soient $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions différentiables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

- *La somme $f + g$ est différentiable et*

$$\boxed{\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n}$$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \quad \textit{si} \quad m = 1$$

et

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

.

Règle de différentiation d'une composée

- *Le produit par un scalaire $\lambda\, f$ est différentiable et*

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda\, f)}{\partial x_i} = \lambda\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n}$$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(\lambda\, f) = \lambda\, \vec{\nabla} f \qquad \textit{si } m = 1$$

et

$$d(\lambda\, f) = \lambda\, df \qquad \textit{et} \qquad J_{\lambda\, f} = \lambda\, J_f.$$

Règle de différentiation d'une composée

Si $m = 1$ alors le produit fg est différentiable et se différencie selon la règle de Leibniz :

$$\boxed{\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n}$$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(fg) = \left(\vec{\nabla} f\right)\, g + f\, \left(\vec{\nabla} g\right)$$

et

$$d(fg) = (df)\, g + f\,(dg) \quad \textit{et} \quad J_{fg} = (J_f)\, g + f\,(J_g)$$

Exemple

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2\, e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\Big(xy^2\, e^{xy}\Big) = \frac{\partial(xy^2\, e^{xy})}{\partial x}\, dx + \frac{\partial(xy^2\, e^{xy})}{\partial y}\, dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\Big(xy^2\, e^{xy}\Big) &= d(xy^2)\, e^{xy} + xy^2\, d(e^{xy}) \\ &= (y^2\, dx + 2xy\, dy)\, e^{xy} \\ &\quad +xy^2\, (y\, e^{xy}\, dx + x\, e^{xy}\, dy) \\ &= (y^2 + xy^3)\, e^{xy}\, dx + (2xy + x^2y^2)\, e^{xy}\, dy \end{aligned}$$

Composée de différentielles

Proposition.– *Soient* $f = (f_1, ..., f_m) : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *et* $g = (g_1, ..., g_p) : D_g \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *deux fonctions différentiables. Soient* $x \in D_f$ *et* $y = f(x) \in D_g$*, alors* $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est différentiable en* x *et on a :*

- $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

(composition d'applications linéaires)

- $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$

(produit de matrices)

- *Pour tout* $i = 1, ..., n$ *et tout* $j = 1, ..., p$*, on a*

$$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(x))\,\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(x))\,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)}$$

(règle de composition des différentielles)

Cas particuliers

• Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$. On a

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = g'\big(f(x, y)\big)\ df_{(x,y)},$$

$$J_{g\circ f}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ J_f(x, y)$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}}$$

Cas particuliers

- Soient $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto (x,y) = h(u,v)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$. On a :

$$d\big(f \circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f\circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

Cas particuliers

• Soient $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x, y) = \gamma(t)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$, on a

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f\circ\gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

et

$$\boxed{(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ y'(t)}$$

Exemples

• Soient $f(x,y) = x^2y - y^2 = z$ et $g(z) = \ln z$. Partout où cela a un sens, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) = g'(x^2y - y^2)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x^2y - y^2}\,2xy \\[2ex] \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) = g'(x^2y - y^2)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2y - y^2}\,(x^2 - 2y), \end{cases}$$

Ainsi

$$d(g\circ f)_{(x,y)} = \frac{1}{x^2y - y^2}\left(2xy\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy\right)$$

Exemples

- Soient $f(x,y) = x^3 - y^2$ et $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u,v) & = & \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ & & +\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ & = & 3v^2\cdot 0 - 2uv^2\cdot v^2 = -2uv^4 \\ \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u,v) & = & \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ & & +\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)) \\ & = & 3v^2\cdot 1 - 2uv^2\cdot 2uv = 3v^2 - 4u^2v^3 \end{array} \right.$$

Ainsi

$$d(f\circ h)_{(u,v)} = -2uv^4\,du + (3v^2 - 4u^2v^3)\,dv$$

Exemples

En passant par les matrices jacobiennes, on aurait obtenu

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

donc

$$J_{f\circ h}(u,v) = \begin{pmatrix} 3v^2 & -2uv^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3v^2 \cdot 0 - 2uv^2 \cdot v^2 & 3v^2 \cdot 1 - 2uv^2 \cdot 2uv \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2uv^4 & 3v^2 - 4u^2v^3 \end{pmatrix}.$$

Exemples

• Soient $f(x,y) = x^3 - y^2$ et $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x,y)$, on a d'une part

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)\ y'(t)\\ &= 3(t^2)^2\cdot 2t - 2(3t)\cdot 3 = 6t^5 - 18t.\end{aligned}$$

D'autre part

$$(f\circ\gamma)(t) = f(t^2, 3t) = (t^2)^3 - (3t)^2 = t^6 - 9t^2$$

ce qui montre directement que

$$(f\circ\gamma)'(t) = 6t^5 - 18t.$$

Exercices

Énoncé.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles ont pour expression

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2-y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}.$$

Calculer en tout point $(u,v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ les dérivées partielles $\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}$ et $\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}$ de la fonction

$$F(u,v) := f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

Réponse.– La fonction F est l'expression de f dans les coordonnées (u,v), le changement de coordonnées étant donné par

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2} \qquad \text{et} \qquad y(u,v) = \frac{u-v}{2}.$$

Exercices

• Notons que la composée est bien définie si et seulement si $y(u,v) \neq \pm x(u,v)$, il faut donc que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

• La règle de composition des différentielles appliquée à $F = f \circ h$ où $h(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2\ \frac{u+v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{2\ \frac{u-v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2} \\
&= -\frac{u+v}{2u^2v^2} + \frac{u-v}{2u^2v^2} \\
&= -\frac{1}{u^2 v}
\end{aligned}$$

Exercices

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-v}{2}\right) \\
&= -\frac{2\ \frac{u+v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4}-\frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\,\frac{1}{2} + \frac{2\ \frac{u-v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4}-\frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{u+v}{2u^2v^2} - \frac{u-v}{2u^2v^2} \\
&= -\frac{1}{uv^2}
\end{aligned}$$

Énoncé (suite).– Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée $G'(t)$ de la fonction $G(t) = f(\cosh t, \sinh t)$ (restriction de f à la branche de l'hyperbole $x(t) = \cosh t$ et $y(t) = \sinh t$).

Exercices

Réponse.– Notons que G est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet f est dérivable sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \neq 0\}.$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t)^2 - y(t)^2 = 1 \neq 0$$

• La règle de composition des différentielles appliquée à $G = f \circ \gamma$ où $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$ conduit aux calculs suivants :

Exercices

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\cosh t, \sinh t\big)\ \frac{d\ \cosh t}{d\,t} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\cosh t, \sinh t\big)\ \frac{d\ \sinh t}{d\,t} \\
&= -\frac{2\cosh t}{(\cosh^2 t - \sinh^2 t)^2}\ \sinh t + \frac{2\sinh t}{(\cosh^2 t - \sinh^2 t)^2}\ \cosh t \\
&= -2\cosh t \sinh t + 2\cosh t \sinh t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

• Ceci montre que f est constante sur la branche d'hyperbole paramétrée par γ.

Exercices

Énoncé.– Soient (x, y, z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques et (r, φ, θ) les coordonnées sphériques. On rappelle que

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \rho \in [0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} r \in [0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in [0, \pi] \end{array}\right.$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ et $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ satisfont aux formules suivantes :

Exercices

$$(i)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \cos\varphi \, \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \, \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \, \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \, \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(i')\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \, \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi \, \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \, \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi \, \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Exercices

$$
(i)\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z}\\[2ex]
\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\[2ex]
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \cos\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z}
\end{cases}
$$

$$
(ii')\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}
\end{cases}
$$

Exercices

$$(iii)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

Exercices

Réponse.– Montrons (i). Pour cela on applique la règle de composition des différentielles à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variable des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} \\
&= \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

On en déduit les équations (i). Les équations (ii') en découlent par inversion du système.

Exercices

• Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variable des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho\sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r\cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

• Il « suffit » d'inverser le système pour obtenir (ii').

• On peut ensuite obtenir (iii) et (iii') par combinaison des systèmes (i) à (ii').

Fin CM 4


Le séminaire de
La détente mathématique
continue en 2016
MMI
1 place de l'École, Lyon 7
Métro Debourg
Dès le
6 janvier
Avec
Jérôme Germoni
Pierre Dehornoy
Francis Lazarus
Titouan Carette
Ana Lecuona
Christopher-Lloyd Simon
Nicolas Trotignon
Sebastián Barbieri
Valentin Seigneur
Fabrice Mouhartem
Étienne Moutot
Tanessi Quintanar
François Rousse
+ La Brocante mathématique !
Tout le détail du programme sur Facebook !
+ sur mmi-lyon.fr > détente mathématique
Les mercredis
Rendez-vous à la MMI
à 17h30 pour le goûter,
18h pour l'exposé
et enfin, apéro !

Fin CM 4