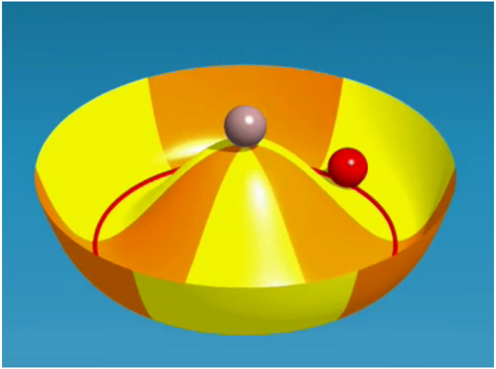
Fonctions de plusieurs variables III

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le programme

Partie I : Fonctions (7 semaines)

CM 1.– Coordonnées, topologie
CM 2.– Fonction, graphe, composition
CM 3.– Limite, différentielle
CM 4.– Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5.– Hessienne, Taylor, extrema
CM 6.– Intégrales simples et doubles
CM 7.– Intégrales triples et applications

Le programme

Partie II : Champs de vecteurs (5 semaines)

CM 8.– Champs de vecteurs et lignes de champs
CM 9.– Champs conservatifs
CM 10.– Champs incompressibles
CM 11.– Circulation sur les courbes
CM 12.– Flux et surfaces

Adresses utiles

Deux adresses :

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Cours_Math2

http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/Math2/

Chapitre 2
Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre :

1. Limites et continuité
2. Dérivées partielles
3. Dérivée directionelle
4. Gradient
5. Différentielle
6. Jacobienne
7. Resumé sur les dérivées
8. Règle de la chaîne
9. Hessienne
10. Taylor
11. Extrema locaux

Matrice hessienne

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour de classe C^1, leurs dérivées partielles se notent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

et se nomment *dérivées partielles secondes* de l'application f. On définit similairement les *dérivées partielles d'ordre k de f* :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.$$

Un cas particulier

• Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables (x, y), les dérivées secondes sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Définition.– Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de *classe* C^k sur D si toutes ses dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre k et sont continues en tout point de D. Une fonction est *lisse*, ou de *classe* C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le théorème de Schwarz

Théorème.– *Si pour tout* $i, j \in \{1, ..., n\}$, *les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent sont continues en* x, *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

pour tout $i \neq j$.

Corrolaire.– *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse) alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre* k *(ou* ∞*), ayant le même nombre de dérivées en chaque* x_i, *coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.*

Exemples

• Soit $f(x,y) = x^3y^2$. Comme f est polynomiale, elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases}$$

et l'on constate que les dérivées partielles mixtes sont identiques.

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

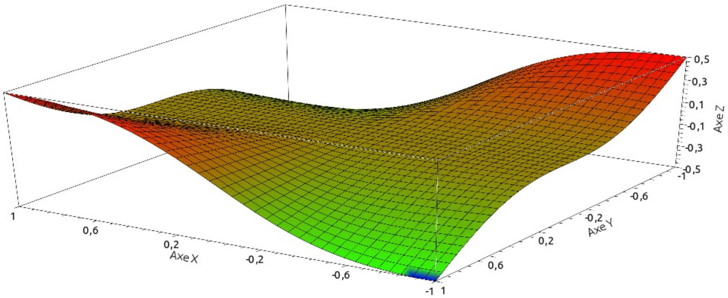
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul (long et fastidieux) permet de montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

Par conséquent, les dérivées secondes ne sont pas continues en $(0,0)$, la fonction f n'est donc pas de classe C^2 au point $(0,0)$.

Exemples



Exercices

Énoncé.– Soient F et G deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et soit $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$. Montrer que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, l'application u est solution de l'ÉQUATION DES ONDES

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Réponse.– L'application u est de classe C^2 comme composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\,\tfrac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\,\tfrac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\
&= F'(x-ct) + G'(x+ct)
\end{aligned}$$

Exercices

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct).\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}\\ &= F''(x-ct) + G''(x+ct),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F'(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G'(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= (-c)^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Matrice hessienne

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $x = (x_1, ..., x_n) \in D$. La *matrice hessienne* de f en x est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en x :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique (théorème de Schwarz) et son déterminant $\mathrm{Hess}\, f(x, y) := \det H_f(x, y)$ s'appelle le *hessien* de f.

Exemples

- Soit $D = \{(x,y) \mid x^2y+1>0\}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(x^2y+1).$$

On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{x^2y+1} \\ \\ \dfrac{x^2}{x^2y+1} \end{pmatrix}$$

Puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y(x^2y+1)-2xy\,2xy}{(x^2y+1)^2} & \dfrac{2x(x^2y+1)-2xy\,x^2}{(x^2y+1)^2} \\ \\ \dfrac{2x(x^2y+1)-x^2\,2xy}{(x^2y+1)^2}y & -\dfrac{x^2\,x^2}{(x^2y+1)^2} \end{pmatrix}$$

Exemples

Une fois simplifiée, cette expression devient

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y(1-x^2y)}{(x^2y+1)^2} & \dfrac{2x}{(x^2y+1)^2} \\ \\ \dfrac{2x}{(x^2y+1)^2}y & -\dfrac{x^4}{(x^2y+1)^2} \end{pmatrix}$$

D'où le déterminant :

$$\begin{aligned} \det H_f(x,y) &= -\frac{2y(1-x^2y)}{(x^2y+1)^2}\,\frac{x^4}{(x^2y+1)^2} - \left(\frac{2x}{(x^2y+1)^2}\right)^2 \\ &= -\frac{2x^4(y-x^2y^2+1)}{(x^2y+1)^4} \end{aligned}$$

Exemples

- Soit $g(x,y,z) = x\sin y + y\sin z$. On a

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y\cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x\sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y\sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y\Big(-y\cos y\sin z - 0\Big) \\ &= y\cos^2 y\sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé.– Montrer que le hessien de la fonction $f(x,y) = \sin(x-y)$ est nul en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $x = (x_1, ..., x_n) \in D$. Le *laplacien* de f en x est la trace de la matrice hessienne de f en x :

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x)$$

Définition.– Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\Delta f(x) = 0$ en tout point $x \in D$.

Interprétation géométrique

Proposition.– *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $C \subset D$ un carré de taille $h \times h$. On note*

$$\mu(f, C) = \frac{1}{h^2} \iint_C f(x, y)\, dx\, dy$$

la moyenne de f sur C. Alors, pour tout point $(a, b) \in C$, on a

$$\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24} \Delta f(a, b) + O(h^4)$$

• Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$ et la constante de proportionalité ne dépend que de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exemple

• Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2(y+1)}{z-1}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{2x(y+1)}{z-1} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{x^2}{z-1} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\dfrac{x^2(y+1)}{(z-1)^2} \end{cases}$$

Exemple

Puis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{2(y+1)}{z-1} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \dfrac{2x^2(y+1)}{(z-1)^3} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta f(x,y,z) &= \frac{2(y+1)}{z-1} + \frac{2x^2(y+1)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{2(y+1)\big((z-1)^2 + x\big)}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la fonction $u(x,t) = x^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2$$

et $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercices

Énoncé.– Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x,y) := f(\sqrt{x^2+y^2})$. Déterminer le laplacien de F en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse.– Il s'agit de calculer

$$\Delta F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

Notons f' et f'' les dérivées de la fonction f. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

Exercices

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \\
&\quad + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Exercices

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2}{x^2+y^2} \\
&\quad + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}
$$

et de la même façon

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y^2}{x^2+y^2} \\
&\quad + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\Delta F(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Exercices

Énoncé (suite).– Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Réponse.– Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, l'équation

$$\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

est équivalente à

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

qui ne dépend que de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

• Elle se réduit donc à une équation différentielle du deuxième ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$\text{(E)} \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\,f'(r) = r$$

Exercices

• Pour résoudre cette nouvelle équation, on la transforme en un système d'équations différentielles du premier ordre (toujours non homogènes et à cœfficients non constants) :

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & \text{(E1)} \\ \\ g'(r) + \dfrac{1}{r}\, g(r) = r & \text{(E2)} \end{cases}$$

• On résout d'abord (E2) puis on reporte la solution pour résoudre (E1).

• Les solutions g de (E2) s'obtiennent à partir des solutions générales g_0 de l'équation homogène associée

$$g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = 0$$

et d'une solution particulière g_p de (E2) obtenue avec la méthode de la variation de la constante.

Exercices

• Explicitement, on doit d'abord résoudre

$$g_0'(r) = -\frac{1}{r}\, g_0(r)$$

ce qui donne

$$g_0(r) = \lambda\, e^{-\int \frac{1}{r}\, dr} = \lambda\, e^{-\ln r} = \lambda\, e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \lambda\, \frac{1}{r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Il faut ensuite chercher une solution particulière de (E2) sous la forme $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$ (variation de la constante), ce qui donne

$$g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$$

Exercices

Ainsi

$$g_p'(r) + \frac{1}{r}\, g_p(r) = r \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r$$
$$\Longleftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

et on peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$ d'où $g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

• Les solutions de (E2) sont donc

$$g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Enfin, les solutions de (E) se trouvent à partir de celles (E1) :

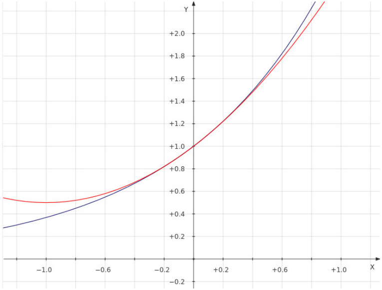
$$f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \Longleftrightarrow f(r) = \lambda\, \ln(r) + \frac{r^2}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

La formule de Taylor

Rappel.– Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in D$. Alors, pour tout $x \in D$ on a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o((x-a)^2)$$



Les graphes de f (en bleu) et de g (en rouge)

Exemple.– $f(x) = exp(x)$, $g(x) = 1 + x + x^2/2$ et $a = 0$

La formule de Taylor

- On se limite au cas des fonctions de deux variables.

Théorème.– *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *et* $(a,b) \in D$*. Alors, pour tout* $(x,y) \in D$ *on a*

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\,(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\,(y-b)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\,(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2$$

$$+||(h,k)||^2\,\varepsilon(h,k)$$

soit encore

$$f(x,y) = f(a,b) + J_f(a,b)\,\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b)\,\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + o(||(h,k)||^2)$$

où $h = x - a$ *et* $k = y - b$*.*

Exemples

• Soit $f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1}$ et $(a,b) = (0,0)$. On a $f(0,0) = 1$, puis

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix}$ d'où $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\frac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o(||(x,y)||^2)$$

Exemples

- Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$, $(a,b) = (2,-1) \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x-y}{xy-1}.$$

On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(xy-1)-(x-y)y}{(xy-1)^2} \\ \\ \frac{-(xy-1)-(x-y)x}{(xy-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{(xy-1)^2} \\ \\ \frac{1-x^2}{(xy-1)^2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{\nabla} f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemples

Le calcul de la hessienne donne

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{(y^2-1)\ 2(xy-1)y}{(xy-1)^4} & \frac{2y(xy-1)^2-(y^1-1)\ 2(xy-1)x}{(xy-1)^4} \\ \text{idem} & -\frac{(1-x^2)\ 2(xy-1)x}{(xy-1)^4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2y(y^2-1)}{(xy-1)^3} & \frac{2(x-y)}{(xy-1)^3} \\ \text{idem} & -\frac{2x(1-x^2)}{(xy-1)^3} \end{pmatrix}$$

D'où

$$H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Exemples

Ainsi, pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\frac{x-y}{xy-1} = -1 - \frac{1}{3}\,(y+1) - \frac{2}{9}\,(x-2)(y+1) - \frac{2}{9}\,(y+1)^2$$

$$+o\Big(||(x-2, y+1)||^2\Big)$$

Exercice

Énoncé.– Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x-y}{xy-1}.$$

Montrer que le plan d'équation $x - y + z = 0$ approche à l'ordre 2 le graphe de la fonction f.

Réponse.– Il s'agit de montrer que le développement de Taylor de f à l'ordre deux a pour expression

$$f(x,y) = y - x + o(x^2+y^2).$$

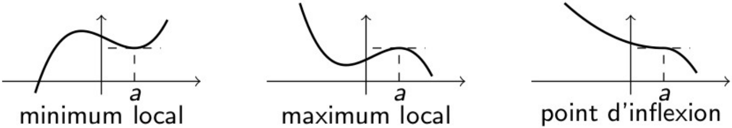
Or $f(0,0) = 0$ et d'après les calculs faits plus haut

$$\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Extrema

Rappel.– Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2.

• Un point $a \in D$ tel que $f'(a) = 0$ est appelé *point critique* de f, le réel $f(a)$ est appelé *valeur critique* de f.



Extrema

• Si $f''(a) > 0$, le point critique est un *minimum local* de f, i.e. il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]a-\epsilon, a+\epsilon\right[\quad f(x) \geqslant f(a).$$

• Si $f''(a) < 0$, le point critique est un *maximum local* de f, i.e. il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]a-\epsilon, a+\epsilon\right[\quad f(x) \leqslant f(a).$$

• Dans les deux cas, on dit que le point critique est un *extremum local* de f.

Extrema

Supposons désormais que f est de classe C^k avec $k \geqslant 3$.

- Si $f''(a) = 0$, le point critique est dit *plat*.
- Si $f'''(a) \neq 0$ ce point plat est appelé *point d'inflexion* de f.
- Plus généralement, si

$$f''(a) = f'''(a) = ... = f^{2p}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{2p+1}(a) \neq 0$$

alors ce point plat est appelé *point d'inflexion* de f.

- Plus généralement, si

$$f''(a) = f'''(a) = ... = f^{2p-1}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{2p}(a) \neq 0$$

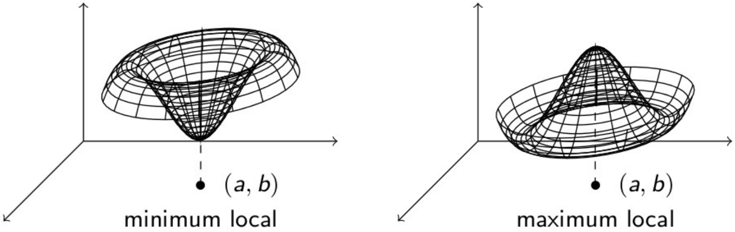
alors ce point plat est un extremum local de f.

Extrema

Définition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in D$. On dit que (a, b) est

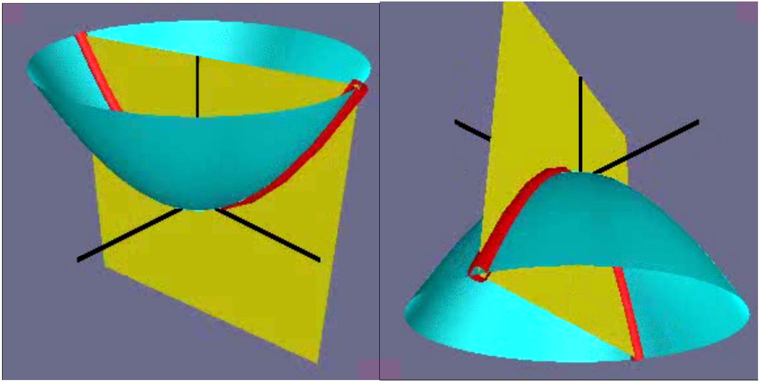
• un *minimum local* s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (a, b) tel que
$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y) \leqslant f(a, b)$$

• un *maximum local* s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (a, b) tel que
$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y) \geqslant f(a, b).$$



Extrema

• Dans les deux cas, on dit que le point critique est un *extremum local* de f.



Un minimum local et un maximum local

Extrema

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2. On dit que $(a, b) \in D$ est un *point critique* de f si $\overrightarrow{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$.

Proposition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et $(a, b) \in D$ un point critique. Si $\det H_f(a, b) > 0$ alors le point (a, b) est un extremum local. De plus

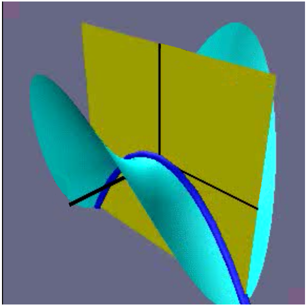
• si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$ alors c'est un minimum local.

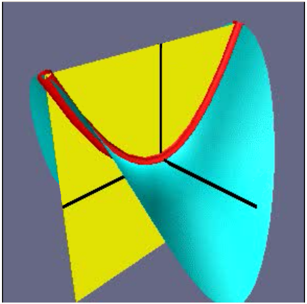
• si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$ alors c'est un maximum local.

Point col

Définition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et $(a, b) \in D$ un point critique.

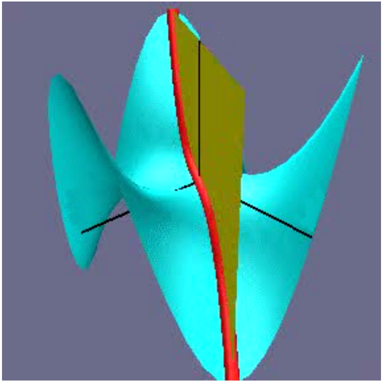
- Si $\det H_f(a, b) < 0$ on dit que (a, b) est un *point col* ou un *point selle*
- Si $\det H_f(a, b) = 0$ on dit que (a, b) est un *point plat*

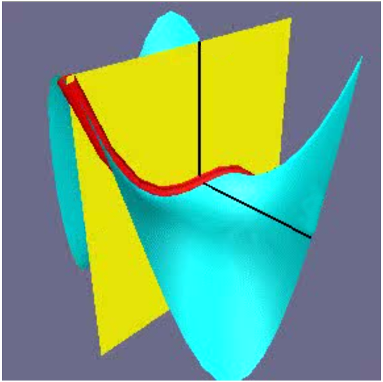




Un point col

Point plat





Un exemple de point plat : la selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé.– Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et, si possible, leur nature.

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \text{ et } H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

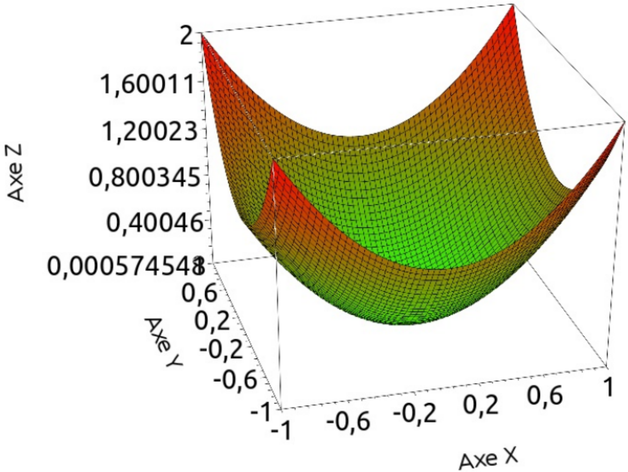
$$\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

et $(0,0)$ est l'unique point critique de f. Puisque

$$\det H_f(0,0) = 4 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

c'est un minimum local.

Exercice



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exercice

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \text{ et } H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

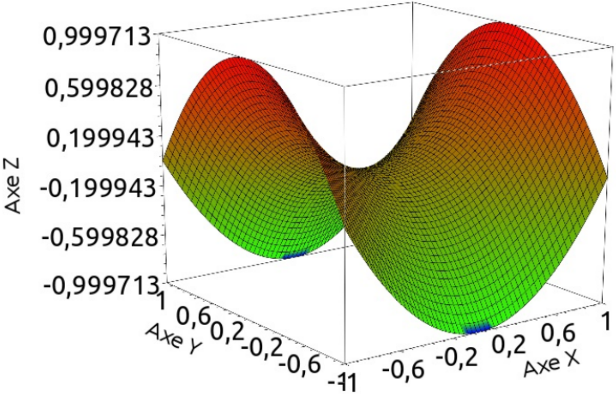
$$\vec{\nabla} f(x, y) = (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$$

et $(0, 0)$ est l'unique point critique de f. Puisque

$$\det H_f(0, 0) = -4 < 0$$

c'est un point col.

Exercice



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Exercice

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

et

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Exercice

Par conséquent, f admet un cercle de points critiques d'équation $x^2+y^2=2$ et un point critique isolé de coordonnées $(0,0)$.

• On a

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

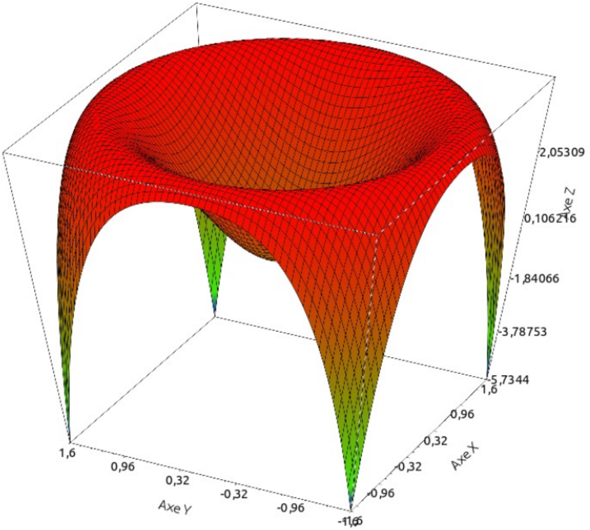
On en déduit que $(0,0)$ est un minimum local.

• Soit (x,y) tel que $x^2+y^2=2$ alors

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui montre que tous les points du cercle $x^2+y^2=2$ sont plats.

Exercice



Graphe de $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$

Fin CM 5