Intégrales multiples

Vincent Borrelli

Université de Lyon

Le programme

Partie I : Fonctions (6 semaines)

CM 1.– Coordonnées, topologie
CM 2.– Fonction, graphe, composition
CM 3.– Limite, différentielle
CM 4.– Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5.– Hessienne, Taylor, extrema
CM 6.– Intégrales simples et doubles
CM 7.– Intégrales triples et applications

Le programme

Partie II : Champs de vecteurs (5 semaines)

CM 8.– Champs de vecteurs et lignes de champs
CM 9.– Champs conservatifs
CM 10.– Champs incompressibles
CM 11.– Circulation sur les courbes
CM 12.– Flux et surfaces

Adresses utiles

Deux adresses :

http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Cours_Math2

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

Chapitre 3
Fonctions de plusieurs variables

Dans ce chapitre :

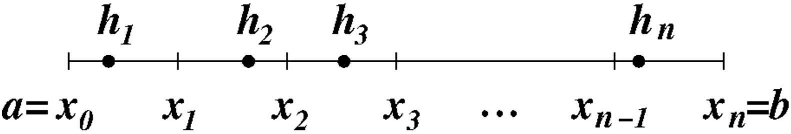
1. Intégrales de Riemann
2. Intégrales doubles
3. Intégrales triples

Intégrale simple de Riemann

Rappel. – On appelle SUBDIVISION de $[a, b]$ un ensemble fini de points $\mathcal{S} = \{x_0, ..., x_n\}$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le PAS $\delta(\mathcal{S})$ de la subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ où $i \in \{1, ..., n\}$.

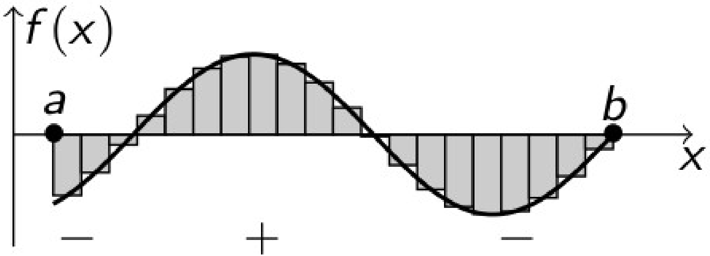


• Pour tout choix de n points $h_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$, on appelle SOMME DE RIEMANN DE f le nombre

$$R(f; \mathcal{S}, \{h_1, ..., h_n\}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(h_i)$$

Intégrale simple de Riemann

• Dans cette somme, chaque terme $(x_i - x_{i-1})f(h_i)$ représente l'aire algébrique du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.



Intégrale simple de Riemann

Théorème.– *Si la limite* $\lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} R(f;\mathcal{S},\{h_i\})$ *existe alors elle est indépendante du choix des points* $h_i \in I_i$*, on la note*

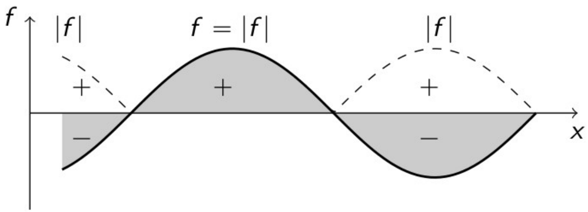
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} R(f;\mathcal{S},\{h_i\})$$

Définition.– Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite l'INTÉGRALE DE f SUR $[a,b]$ et on dit que f est INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN

Proposition.– *Toute fonction continue* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann. Toute fonction monotone sur* $[a,b]$ *est intégrable au sens de Riemann.*

Intégrale simple de Riemann

Signification géométrique de l'intégrale simple.– Cette limite s'interprète comme l'« aire algébrique » de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses.



Intégrale simple de Riemann

Définition.– On dit que $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une PRIMITIVE de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si F est dérivable et que

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) := f(x).$$

Théorème fondamental de l'analyse (partie I).– *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann et $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors F est continue sur $[a, b]$. Si, de plus, f est continue alors F est dérivable et $F' = f$; autrement dit, F est une primitive de f.

Intégrale simple de Riemann

Théorème fondamental de l'analyse (partie II).– *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable et admet une primitive F alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Cas des fonctions continues.– Au bilan, toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, admet une primitive F donnée par

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

et l'on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Techniques pour calculer une intégrale

• Le **changement de variable** : on pose $x = h(t)$ où h est un difféomorphisme c'est-à-dire une bijection dérivable telle que la réciproque h^{-1} soit aussi dérivable. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\,h'(t)\,dt.$$

• L'**intégration par parties** :

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Exemple

Aire d'un disque.– On désire calculer l'intégrale suivante

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

On effectue pour cela le changement de variable $x = \sin t$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Puisque $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ et $dx = \cos t\ dt$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\ dt \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \left(0+\frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

Exemple

• Notons que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

s'interprète comme l'aire de la portion de plan située en dessous du graphe de $y = \sqrt{1-x^2}$ et au dessus de l'axe des abscisses. Cette portion de plan est un demi-disque centré en l'origine et de rayon 1. L'intégrale

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

s'interprète donc comme l'aire d'un disque de rayon 1.

Intégrale double

Définition.– Une SUBDIVISION $\mathcal{S}$ de $[a, b] \times [c, d]$ est une partition du pavé $[a, b] \times [c, d]$ en nm pavés

$$I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$$

avec $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$ et $y_m = d$.. Le PAS $\delta(\mathcal{S})$ de la partition est le maximum des $x_i - x_{i-1}$ et $y_j - y_{j-1}$.

• Pour tout choix de nm points $h_{ij} \in I_i \times J_j$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, on appelle SOMME DE RIEMANN DE $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ le nombre

$$R(f; \mathcal{S}, \{h_{ij}\}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(h_{ij})$$

Intégrale double

Théorème.– *Si la limite* $\lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} R(f;\mathcal{S},\{h_{ij}\})$ *existe alors elle est indépendante du choix des points* $h_{ij}\in I_i\times J_j$*, on la note*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy := \lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} R(f;\mathcal{S},\{h_{ij}\})$$

Définition.– Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite l'INTÉGRALE DOUBLE DE f SUR $[a,b]\times[c,d]$ et on dit que f est INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN sur $[a,b]\times[c,d]$

Proposition.– *Toute fonction continue* $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann.*

Intégrale double

• On note D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenu dans un rectangle $[a,b]\times[c,d]$ (autrement dit, D est bornée).

Définition.– On appelle FONCTION INDICATRICE de D l'application notée $\mathbb{1}_D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

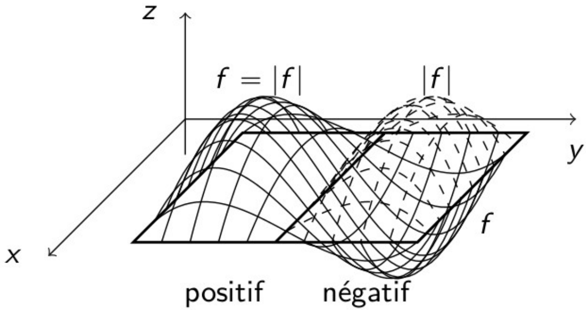
$$\mathbb{1}_D(x,y) = 1 \text{ si } (x,y)\in D, \quad \mathbb{1}_D(x,y) = 0 \text{ sinon.}$$

Définition.– On dit qu'une fonction $f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ est INTÉGRABLE sur $D \subset [a,b]\times[c,d]$ si $\mathbb{1}_D f$ est intégrable sur $[a,b]\times[c,d]$ et on pose

$$\iint_D f(x,y)dxdy := \iint_{[a,b]\times[c,d]} \mathbb{1}_D(x,y)f(x,y)dxdy$$

Intégrale double

Signification géométrique de l'intégrale double.– On interprète l'intégrale double de f sur D comme le « volume algébrique » de la portion de l'espace comprise entre le graphe de f et le plan (Oxy).



Exemple : volume de la boule

Expression intégrale du volume de la boule.– Le volume de la boule

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ y \geq 0\},$$

comprise entre le plan (Oxy) et le graphe de la fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. On a

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Intégrale double

Définition.– Si $\mathbb{1}_D$ est intégrable, on dit que

$$\iint_D \mathbb{1}_D dxdy$$

est l'aire de D.

• Si D est un point, un segment, un cercle ou plus généralement une courbe régulière, alors $Aire(D) = 0$.

Proposition.– *Si* $D = D_1 \cup D_2$ *et* $Aire(D_1 \cap D_2) = 0$ *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$$

Proposition

Proposition.– *1) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iint_D (\lambda\, f + \mu\, g)\; dxdy = \lambda \iint_D f\; dxdy + \mu \iint_D \; dxdy$$

2) On a

$$\left| \iint_D f(x,y)\; dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\; dxdy$$

3) Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$, alors

$$\iint_D f(x,y)\; dx\, dy \leq \iint_D g(x,y)\; dxdy$$

Le théorème de Fubini

Théorème de Fubini sur le rectangle.– *Soit $f : D = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on a*

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy\end{aligned}$$

et on note

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy := \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Corollaire.– *On a*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\,f_2(y)\,dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy$$

Exemples

- **Exemple 1.–**

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\, dxdy &= \int_0^1 x\, dx \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

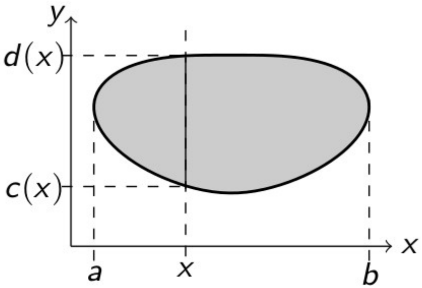
- **Exemple 2.–**

$$\begin{aligned}\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\, dxdy &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\, dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini

• Soit D un domaine délimité par deux courbes, c'est-à-dire un domaine pour lequel il existe deux applications continues $c, d : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$$



Le théorème de Fubini

Théorème de Fubini sur D.– *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Si D est décrit avec deux applications continues $a, b : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

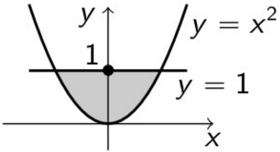
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

alors

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Exemples

• **Exemple 1.–** Soit
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\}$.



On a

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y\, dx\, dy &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx \int_{x^2}^{1} y\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

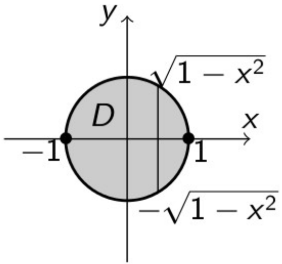
Exemples

• **Exemple 2 : Volume de la boule (suite).–** Rappelons que

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

où

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}.$$



On a donc aussi

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,1],\ y\in\left[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\right]\right\}$$

Exemples

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable

$$y = y(t) = \sqrt{1-x^2}\,\sin t, \quad dy = \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,dt$$

d'où

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\sqrt{1-x^2}\,\cos t\,dt$$

Exemples

Par conséquent

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_{-1}^{1}\,dx\,\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-x^2)\cos^2 t\;dt$$

Or, d'après l'exemple précédent,

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\;dt = \pi$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\;dx\,\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\;dt \\
&= \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\;dx \\
&= \pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Changement de variables

• Soit

$$\begin{array}{cccc} h: & \Delta & \longrightarrow & D \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v),y(u,v)) \end{array}$$

un C^1-difféomorphisme, c'est-à-dire une application C^1 qui est bijective et dont la réciproque $h^{-1}: D \longrightarrow \Delta$ est aussi C^1.

• Rappelons que la jacobien *Jac h* est le déterminant de la matrice jacobienne J_h

$$Jac\ h(u,v) = \det J_h(u,v) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Changement de variables

Théorème.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $h : \Delta \longrightarrow D$ un C^1-difféomorphisme alors

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left| \det J_h(u,v) \right| dudv$$

- **Passage en polaire.–** L'application

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, x \leq 0\} \\ & (\rho,\varphi) & \longmapsto & (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme et

$$Jac\ h(\rho,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Changement de variables

Si $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$ alors

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\ \rho\, d\rho d\varphi$$

Remarque.– Puisque

$$\{y = 0, x \leq 0\} \quad \text{et} \quad \big(\mathbb{R}_+^* \times \{\pi\}\big) \cup (\{0\} \times]-\pi, \pi])$$

sont d'aire nulle, la formule ci-dessus est valide pour $D \subset \mathbb{R}^2$.

Exemple

Volume de la boule (suite).– On effectue le calcul de

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

où

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

au moyen d'un passage en coordonnées polaires

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1] \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & D \\ & (\rho, \varphi) & \longmapsto & (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \end{array}$$

• La formule de changement de variable s'écrit

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi$$

Exemple

- Le théorème de Fubini permet de séparer les variables :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi.\\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\, d\rho.\end{aligned}$$

- Le changement de variable $t = 1-\rho^2$, $dt = -2\rho d\rho$ donne

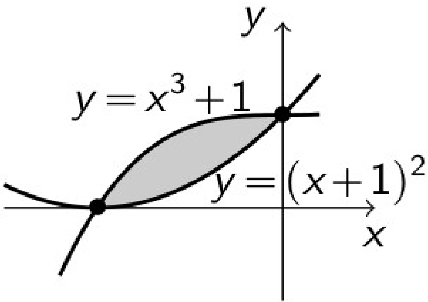
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= -\frac{2}{2}\, 2\pi \int_1^0 t^{1/2}\, dt = 2\pi \int_0^1 t^{1/2}\, dt\\ &= 2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\, \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse.– On constate rapidement que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0,\ x^2 + 2x + 1 \leq y \leq x^3 + 1\right\}.$$



Exercices

• On applique le théorème de Fubini pour séparer les variables :

$$\begin{aligned}
Aire(D) &= \iint_D dx\, dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} \\
&= -\left(\tfrac{1}{4}(-1)^4 - \tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2\right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer

$$I := \iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy$$

où D est le domaine de l'exercice précédent.

Réponse.– Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini pour séparer les variables

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\, dy \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\, x^2 y - y^2 \,\right]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 \\
&\quad -x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2 \Big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x \right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2 \right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - 2 + 2 = \frac{13}{42}
\end{aligned}$$

Fin CM 6


MMI
MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
SOIRÉES MATHÉMATIQUES DE LYON
Philippe Caldero
THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS, LES ORIGINES
Lundi 14 mars 2016 à 20h
Lycée du Parc
1 boulevard Anatole France
69006 Lyon
Tout public
Entrée libre et gratuite
MMI
1, PLACE DE L'ÉCOLE
1er ÉTAGE
69007 LYON
OUVERT
LES MERCREDIS
DE 13 H 30 À 18 H
LES SAMEDIS
DE 11 H 30 À 18 H
ENTRÉE
LIBRE
ET GRATUITE
ACCESSIBLE
À TOUS LES PUBLICS
GROUPES & SCOLAIRES
SUR RDV
www.mmi-lyon.fr
T 04 72 43 11 80
contact@mmi-lyon.fr
facebook.com/mmi.lyon
@MMI_lyon

Intégrale triple

• On définit l'intégrale triple d'une fonction

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$$

similairement à l'intégrale double au moyen de sommes de Riemann

$$R(f; \mathcal{S}, \{h_{ijk}\}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{q} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) f(h_{ijk})$$

sur des subdivisions $\mathcal{S}$ en parallélépipèdes.

• Lorsque la limite $\lim\limits_{\delta(\mathcal{S}) \to 0} R(f; \mathcal{S}, \{h_{ijk}\})$ existe, elle est indépendante du choix des points h_{ijk} et on la note

$$\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z) dxdydz$$

Intégrale triple

• On dit alors que f est INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN sur $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ et on appelle cette limite l'INTÉGRALE TRIPLE DE f SUR $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

• On dit enfin qu'une fonction

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est INTÉGRABLE sur $D \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ si $\mathbb{1}_D f$ est intégrable sur $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ et on pose

$$\iiint_D f(x, y) dxdydz := \iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} \mathbb{1}_D(x, y) f(x, y, z) dxdydz$$

Intégrale triple

Théorème de Fubini I.– *Soit* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ *et* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue alors*

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} dz\, f(x,y,z)$$

(dans l'ordre qu'on voudra)

Théorème de Fubini II.– *Soient*

$$D = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|$$

$$x \in [a_1, b_1],\ y \in [a_2(x), b_2(x)],\ z \in [a_3(x,y), b_3(x,y)] \Big\}$$

et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue alors*

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2(x)}^{b_2(x)} dy \int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} dz\, f(x,y,z)$$

Exemples

- Soit à calculer

$$J = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz.$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\, (x^2 - 2yz) \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2xyz\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\tfrac{1}{3} - 2yz\right) \\
&= \int_2^3 \left[\tfrac{1}{3}y - y^2 z\right]_{y=1}^{y=2} dz \\
&= \int_2^3 \left(\tfrac{2}{3} - 4z - \tfrac{1}{3} + z\right) dz \\
&= \int_2^3 \left(\tfrac{1}{3} - 3z\right) dz = \left[\tfrac{1}{3}z - \tfrac{3}{2}z^2\right]_2^3 \\
&= \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}
\end{aligned}$$

Exemples

• Soit Ω le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\right\}$:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \right. \\
&\quad \left. x \in [-1,1],\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right],\ z \in [0,3] \right\}
\end{aligned}$$

On cherche à déterminer

$$J = \iiint_\Omega (1-2yz)\, dx\, dy\, dz$$

Exemples

En appliquant la deuxième version du théorème de Fubini on obtient

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left[y - y^2 z\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} \\
&\qquad\qquad + (1-x^2)z\Big)\,dx \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt \\
&= 3\pi
\end{aligned}
$$

Changement de variables

Théorème.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $h : \Delta \longrightarrow D$ un C^1-difféomorphisme alors

$$\iiint_D f(x, y, z)\ dxdydz$$

$$=$$

$$\iiint_\Delta f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det J_h(u, v, w) \right| dudvdw$$

Corollaire.– En coordonnées cylindriques :

$$dxdydz = \left| \det J_h(\rho, \varphi, z) \right| d\rho d\varphi dz = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz$$

• En coordonnées sphériques :

$$dxdydz = \left| \det J_h(r, \varphi, \theta) \right| drd\varphi d\theta = r^2 \sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta$$

Exemple

• Considérons à nouveau l'intégrale J de la fonction

$$f(x,y,z) = 1 - 2yz$$

sur le cylindre plein Ω de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}$$

En coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 \right\} \\ &= \left\{ (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ z \in [0,3] \right\} \end{aligned}$$

Exemple

Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\ \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\,d\varphi \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\,\Big[\varphi + 2\rho\cos\varphi z\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\Big)\,\rho\,d\rho \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\,\rho\,d\rho \\
&= 3\,\pi\,\Big[\rho^2\Big]_0^1 \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Volume

Définition.– Soit $D \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. On appelle VOLUME DE D le nombre

$$Vol(D) := \iiint_D dx\, dy\, dz$$

Exemple : volume de la boule.– En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$h^{-1}(B) = \{\, (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi[,\ \theta \in [0, \pi] \,\}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\, dr\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\, 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\,(1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

• En physique, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), une *densité* de courant ou une densité dénergie, alors on appelle QUANTITÉ TOTALE de matière /courant/énergie en D le nombre

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

On appelle QUANTITÉ MOYENNE de matière /courant/énergie en D le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)}\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

Exemple

• Un matériau est réparti dans un cube $D = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{(z + 1)^2}$. La quantité totale du matériau est alors

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^R dx \int_0^R (x+y)dy \int_0^R \tfrac{1}{(z+1)^2}dz \\
&= \int_0^R \Big[xy + \tfrac{1}{2}y^2 \Big]_0^R dx \Big[-\tfrac{1}{z+1} \Big]_0^R \\
&= \int_0^R \Big(Rx + \tfrac{1}{2}R^2 \Big) dx \Big(1 - \tfrac{1}{R+1} \Big) \\
&= \Big[\tfrac{1}{2}Rx^2 + R^2 x \Big]_0^R \tfrac{R}{R+1} \\
&= \Big(\tfrac{1}{2}R^3 + R^3 \Big) \tfrac{R}{R+1} = \tfrac{3R^4}{2(R+1)},
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Vol}\,(D) = R^3$, la quantité moyenne du matériau dans le cube est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)} \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{R^3}\frac{3R^4}{2(R+1)} = \frac{3R}{2(R+1)}.$$

Barycentre

• La MASSE TOTALE de D est le nombre

$$\iiint_D \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

où $\mu : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la *densité de masse*

• Le CENTRE DE MASSE (ou CENTRE D'INERTIE, ou encore BARYCENTRE) est le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\,\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_D y\,\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_D z\,\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

Moment d'inertie

• Un matériau est dit HOMOGÈNE si sa densité de masse $\mu : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est constante.

• Soit $r(x, y, z)$ la distance d'un point (x, y, z) depuis une origine P ou une droite Δ

• Le MOMENT D'INERTIE par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M}\iiint_D r^2(x, y, z)\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemple

• On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \in [0, H], y \geq 0 \,\}.$$

Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire

$$h^{-1}(D) = \{\, (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, \pi],\ z \in [0, H]\}.$$

Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{array}{rcl} M & = & \iiint_D dx\ dy\ dz \\ & = & \iiint_{h^{-1}(D)} \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz \\ & = & \int_0^R \rho\ d\rho\ \int_0^\pi d\varphi\ \int_0^H dz \\ & = & \frac{\pi R^2 H}{2}. \end{array}$$

Exemple

Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\iiint_{h^{-1}(D)} \rho\cos\varphi\;\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\;\int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi\;\int_0^H dz = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\;\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\;\int_0^H dz \\
&= \frac{2}{\pi R^2 H}\,\frac{R^3}{3}\,2\,H = \frac{4R}{3\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho\,d\rho\;\int_0^\pi d\varphi\;\int_0^H z\,dz \\
&= \frac{2}{\pi R^2 H}\,\frac{R^2}{2}\,\pi\,\frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}
$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice

Exercice 1.– Une poudre est répartie sur une plaque infinie selon la densité

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}$$

où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la quantité totale et moyenne de poudre sur un disque de rayon $R > 0$ et centré en l'origine.

Réponse.– Il est naturel de passer en coordonnées polaires. La fonction f s'écrit alors

$$f(\rho,\varphi) = \frac{1}{(\rho+1)^2}$$

et le disque de rayon R peut se décrire comme $D_R = \{\,(\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\,\}$.

Exercice

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\text{Quantité totale} &= \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\,\rho\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) d\rho \\
&= 2\pi \left[\ \ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1}\ \right]_0^R \\
&= 2\pi \left(\ \ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - \ln 0 - 1\ \right) \\
&= 2\pi \left(\ \ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\ \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}\,(D_R) &= \iint_{D_R} \rho\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2
\end{aligned}$$

Exercice

Enfin

$$\begin{aligned}\text{Quantité moyenne} &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D_R)} \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2}\left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right)\end{aligned}$$

Exercice 2.– Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivants :

$$\begin{aligned} B_R^- &= \left\{(r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi]\right\} \\ C_R &= \left\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R]\right\},\end{aligned}$$

et avec la densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

Exercice

Réponse.– La masse totale de Ω est $M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R}$, avec $\mu(x,y,z) = r^2\cos^2\theta$ sur B_R^-. On a donc

$$\begin{aligned}
M_{B_R^-} &= \iiint_{B_R^-} r^2\cos^2\theta\; r^2\sin\theta\; dr\; d\varphi\; d\theta \\
&= \int_0^R r^4\; dr\; \int_0^{2\pi} d\varphi\; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\; d\theta \\
&= \frac{R^5}{5}\, 2\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{2\pi R^5}{15}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M_{C_R} &= \iiint_{C_R} z^2\; \rho\; d\rho\; d\varphi\; dz \\
&= \int_0^R \rho\; d\rho\; \int_0^{2\pi} d\varphi\; \int_0^R z^2\; dz \\
&= \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^3}{3} \\
&= \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Exercice

Au bilan

$$M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R} = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right)\,\pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}$$

- Puisque

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

les coordonnées cartésiennes du barycentre G de Ω sont :

$$\begin{aligned} x_G &= \tfrac{1}{M_\Omega} \textstyle\iiint_\Omega x\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \tfrac{1}{M_\Omega} \textstyle\int_0^R r^5\,dr\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\,d\theta \\ &\quad + \tfrac{1}{M_\Omega} \textstyle\int_0^R \rho^2\,d\rho\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi\ \int_0^R z^2\,dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice

$$
\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M_\Omega}\int_0^R r^5\,dr\ \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta \\
&\quad+\frac{1}{M_\Omega}\int_0^R \rho^2\,d\rho\ \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\ \int_0^R z^2\,dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega}\iiint_\Omega z^3\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega}\int_0^R r^5\,dr\ \int_0^{2\pi}d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{M_\Omega}\int_0^R\rho\,d\rho \\
&= \frac{15}{7\pi R^3}\left(\frac{R^6}{6}\,2\pi\left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}+\frac{R^2}{2}\,2\pi\,\frac{R^4}{4}\right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{15R^3}{7}\,\frac{-1+3}{12} \\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}
$$

Exercice

- En conclusion, le barycentre G a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

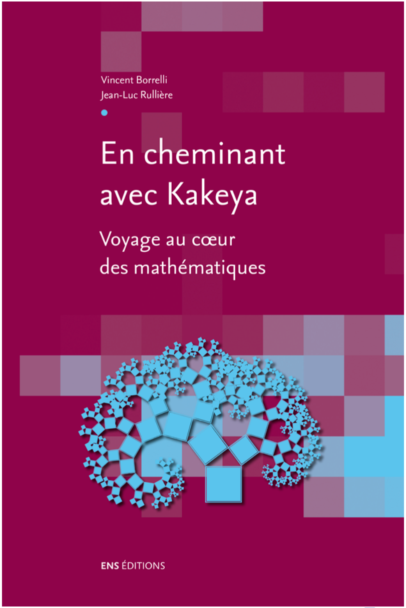
Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

- Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leq R$$

c'est-à-dire si $R \leq \sqrt{14/5}$.

Fin CM 7


Vincent Borrelli
Jean-Luc Rullière
En cheminant avec Kakeya
Voyage au cœur des mathématiques
ENS ÉDITIONS