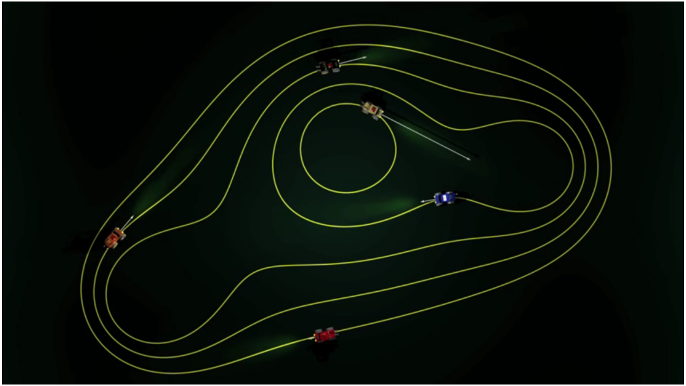
Champs

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le programme

Partie I : Fonctions (6 semaines)

CM 1.– Coordonnées, topologie
CM 2.– Fonction, graphe, composition
CM 3.– Limite, différentielle
CM 4.– Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5.– Hessienne, Taylor, extrema
CM 6.– Intégrales simples et doubles
CM 7.– Intégrales triples et applications

Le programme

Partie II : Champs de vecteurs (5 semaines)

CM 8.– Champs de vecteurs et lignes de champs
CM 9.– Champs conservatifs
CM 10.– Champs incompressibles
CM 11.– Circulation sur les courbes
CM 12.– Flux et surfaces

Adresses utiles

Deux adresses :

`http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Cours_Math2`

`http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/`

Chapitre 4
Champs de vecteurs

Dans ce chapitre :

1. Champs de vecteurs et lignes de champs
2. Champs conservatifs : champ de gradients, rotationnels, lemme de Poincaré
3. Champs incompressibles : divergence nulle, potentiel vectoriel

Chapitre 4
Champs de vecteurs

Définition.– On appelle *champ de vecteurs* toute application

$$\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \vec{E}$$

à valeur dans un espace vectoriel dont la dimension est $\dim_{\mathbb{R}} \vec{E} = n$.

Chapitre 4
Champs de vecteurs

Définition.– On appelle *champ de vecteurs* toute application

$$\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \overrightarrow{E}$$

à valeur dans un espace vectoriel dont la dimension est $\dim_{\mathbb{R}} \overrightarrow{E} = n$.

Remarque.– De nombreuses applications provenant de la physique sont des champs de vecteurs : le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, le champ électrique $\overrightarrow{E}$, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, le champ des vitesses d'un écoulement.

Champs de vecteurs

• Toute base $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ de $\overrightarrow{E}$, permet d'écrire $\overrightarrow{V}$ en coordonnées, i. e. il existe $a_1, ..., a_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D, \quad \overrightarrow{V}(x) = a_1(x)\overrightarrow{e}_1 + ... + a_n(x)\overrightarrow{e}_n.$$

Champs de vecteurs

• Toute base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de $\vec{E}$, permet d'écrire $\vec{V}$ en coordonnées, i. e. il existe $a_1, ..., a_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D, \quad \vec{V}(x) = a_1(x)\vec{e}_1 + ... + a_n(x)\vec{e}_n.$$

• Le choix d'une base induit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de $\vec{E}$ une identification entre $\vec{E}$ et $\mathbb{R}^n$. Il permet d'écrire le champ de vecteurs $\vec{V}$ comme l'application $D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix}$$

Champs de vecteurs

Définition.– On dit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de *classe C^k* si ses applications coordonnées

$$a_1, ..., a_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont de classe C^k.

Champs de vecteurs

Définition.– On dit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de *classe C^k* si ses applications coordonnées

$$a_1, ..., a_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont de classe C^k.

• Cette définition ne dépend pas de la base $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ choisie pour l'identification de $\overrightarrow{E}$ à $\mathbb{R}^n$.

Repère mobile

Définition.– Un repère mobile sur un espace affine E est une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & E \times \vec{E} \times \vec{E} \times \vec{E} \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & (\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p)) \end{array}$$

telle que pour tout p, $(\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p))$ soit un repère de E.

Repère mobile

Définition.– Un repère mobile sur un espace affine E est une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & E \times \vec{E} \times \vec{E} \times \vec{E} \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & (\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p)) \end{array}$$

telle que pour tout p, $(\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p))$ soit un repère de E.

Exemple 1 : le repère mobile cartésien.– Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base standard de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit du repère mobile défini par

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & (p; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{array}$$

Exemple

Exemple 2 : le repère mobile cylindrique.– Il s'agit du repère mobile défini par

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k} \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ & (\rho, \varphi, z) & \longmapsto & (\Omega; \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k}) \end{array}$$

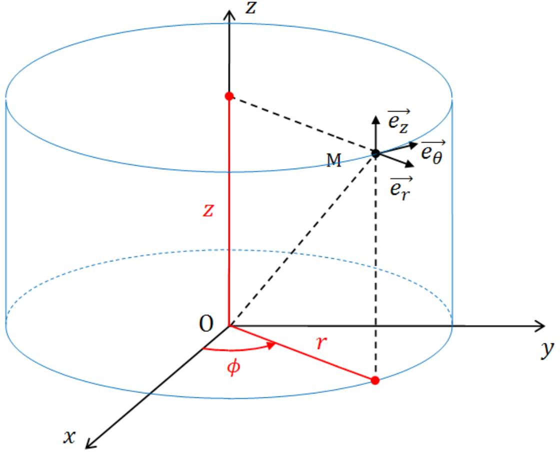
avec

$$\Omega(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

et

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_\rho}(\rho, \varphi, z) = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j} \\ \vec{e_\varphi}(\rho, \varphi, z) = -\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j} \end{array} \right.$$

Le repère mobile cylindrique



Exemple

Exemple 3 : le repère mobile sphérique.– Il s'agit du repère mobile défini par

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k} \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ & (r, \varphi, \theta) & \longmapsto & (\Omega; \vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta}) \end{array}$$

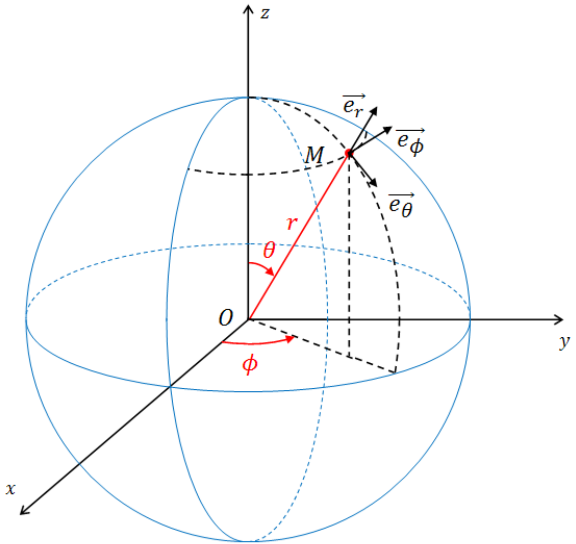
avec

$$\Omega(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \sin\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_r}\,(r, \varphi, \theta) = \cos\varphi \;\sin\theta\,\vec{i} + \sin\varphi \;\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e_\varphi}\,(r, \varphi, \theta) = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \\ \vec{e_\theta}\,(r, \varphi, \theta) = \cos\varphi \;\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi \;\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \end{array} \right.$$

Le repère mobile sphérique



Changement de coordonnées

• Il est parfois très pratique d'exprimer un champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dans un repère mobile

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & E \times \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & (\Omega(p); \overrightarrow{e}_1(p), \overrightarrow{e}_2(p), \overrightarrow{e}_3(p)) \end{array}$$

• On note $\overrightarrow{V}^{\Phi}(p)$ le *vecteur* $\overrightarrow{V}(\Omega(p))$.

• Exprimer $\overrightarrow{V}$ dans le repère mobile Φ c'est, pour tout point $p \in A$, décomposer $\overrightarrow{V}^{\Phi}(p)$ dans la base $\overrightarrow{e}_1(p)$, $\overrightarrow{e}_2(p)$, $\overrightarrow{e}_3(p)$, autrement dit, c'est déterminer a_1^{Φ}, a_2^{Φ} et a_3^{Φ} telles que

$$\forall p \in A, \quad \overrightarrow{V}^{\Phi}(p) = a_1^{\Phi}(p)\overrightarrow{e}_1(p) + a_2^{\Phi}(p)\overrightarrow{e}_2(p) + a_3^{\Phi}(p)\overrightarrow{e}_3(p)$$

Un abus de notation.– Dans la pratique, on n'écrit jamais l'exposant Φ... il est sous-entendu.

Exemple

Un exemple : expression du champ gravitationnel en coordonnées sphériques.– Le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}} : \mathbb{R}^3 \backslash \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(x, y, z) = -\frac{GM}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ dans le repère mobile sphérique

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k} \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ & (r, \varphi, \theta) & \longmapsto & (\Omega; \vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta}) \end{array}$$

c'est trouver a^Φ, b^Φ et c^Φ telles que

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\Omega(r, \varphi, \theta)) = a^\Phi(r, \varphi, \theta)\vec{e_r}(r, \varphi, \theta)$$

$$+b^\Phi(r, \varphi, \theta)\vec{e_\varphi}(r, \varphi, \theta) + c^\Phi(r, \varphi, \theta)\vec{e_\theta}(r, \varphi, \theta)$$

Exemple

Puisque

$$\Omega(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\ \cos\varphi\sin\theta \\ r\ \sin\varphi\sin\theta \\ r\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

on a

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\Omega(r,\varphi,\theta)) = -\frac{GM}{r^2}\,\frac{r\cos\varphi\ \sin\theta\,\vec{i} + r\sin\varphi\ \sin\theta\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}}{r}$$

d'où

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\Omega(r,\varphi,\theta)) = -\frac{GM}{r^2}\ \vec{e_r}\,(r,\varphi,\theta).$$

Ainsi

$$a^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = -\frac{GM}{r^2} \ \text{ et } \ b^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = c^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = 0.$$

En fin de compte

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = -\frac{GM}{r^2}\ \vec{e_r}\,(r,\varphi,\theta)$$

Exercices

Énoncé (passage cartésiennes->cylindriques).– Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur de $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ donné par

$$\vec{V}(x, y, z) = a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k}$$

Déterminer l'expression de ce champ en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \alpha(\rho, \varphi, z)\vec{e_\rho} + \beta(\rho, \varphi, z)\vec{e_\varphi} + \gamma(\rho, \varphi, z)\vec{k}$$

Réponse.– En inversant les formules de l'exemple 2, on trouve

$$\left[\begin{array}{l} \vec{i} = \cos\varphi\ \vec{e_\rho} - \sin\varphi\ \vec{e_\varphi} \\ \vec{j} = \sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \cos\varphi\ \vec{e_\varphi} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{array}\right.$$

Exercices

D'où

$$
\begin{aligned}
\vec{V}(x,y,z) &= a(x,y,z)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k} \\
&= a(x,y,z)(\cos\varphi\ \vec{e_\rho} - \sin\varphi\ \vec{e_\varphi}) \\
&\quad + b(x,y,z)(\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \cos\varphi\ \vec{e_\varphi}) + c(x,y,z)\vec{k} \\
&= \big(a(x,y,z)\cos\varphi + b(x,y,z)\sin\varphi\big)\vec{e_\rho} \\
&\quad + \big(b(x,y,z)\cos\varphi - a(x,y,z)\sin\varphi\big)\vec{e_\varphi} \\
&\quad + c(x,y,z)\vec{k}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\alpha(\rho,\varphi,z) &= a(x,y,z)\cos\varphi + b(x,y,z)\sin\varphi \\
\beta(\rho,\varphi,z) &= b(x,y,z)\cos\varphi - a(x,y,z)\sin\varphi \\
\gamma(\rho,\varphi,z) &= c(x,y,z)
\end{aligned}
$$

avec $x = \rho\ \cos\varphi$ et $y = \rho\ \sin\varphi$.

Exercices

Énoncé (passage cartésiennes->sphériques).– Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur de $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ donné par

$$\vec{V}(x,y,z) = a(x,y,z)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k}$$

Déterminer l'expression de

$$\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \alpha(r,\varphi,\theta)\vec{e_r} + \beta(r,\varphi,\theta)\vec{e_\varphi} + \gamma(r,\varphi,\theta)\vec{e_\theta}$$

en coordonnées sphériques.

Réponse.– En inversant les formules de l'exemple 3, on trouve

$$\left[\begin{array}{l} \vec{i} = \cos\varphi \ \sin\theta \ \vec{e_r} - \sin\varphi \ \vec{e_\varphi} + \cos\varphi \ \cos\theta \ \vec{e_\theta} \\ \vec{j} = \sin\varphi \ \sin\theta \ \vec{e_r} + \cos\varphi \ \vec{e_\varphi} + \sin\varphi \ \cos\theta \ \vec{e_\theta} \\ \vec{k} = \cos\theta \ \vec{e_r} - \sin\theta \ \vec{e_\theta} \end{array}\right.$$

Exercices

D'où

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\
&= a(\cos\varphi\sin\theta\vec{e_r} - \sin\varphi\vec{e_\varphi} + \cos\varphi\cos\theta\vec{e_\theta}) \\
&\quad +b(\sin\varphi\sin\theta\vec{e_r} + \cos\varphi\vec{e_\varphi} + \sin\varphi\cos\theta\vec{e_\theta}) \\
&\quad +c(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) \\
&= \big(a\cos\varphi\sin\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\cos\theta\big)\vec{e_r} \\
&\quad +\big(b\cos\varphi - a\sin\varphi\big)\vec{e_\varphi} \\
&\quad +\big(a\cos\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\cos\theta - c\sin\theta\big)\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\alpha(r,\varphi,\theta) &= a\cos\varphi\sin\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\cos\theta \\
\beta(r,\varphi,\theta) &= b\cos\varphi - a\sin\varphi \\
\gamma(r,\varphi,\theta) &= a\cos\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\cos\theta - c\sin\theta
\end{aligned}$$

avec $x = r\,\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\,\sin\varphi\sin\theta$ et $z = r\,\cos\theta$

Champ radial, champ central

Définition.– Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dit *radial* par rapport à un axe $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ si dans des coordonnées cylindriques telle que $\mathbb{R}\vec{k} = \overrightarrow{\Delta}$, il a pour expression

$$\overrightarrow{V}(\rho, \varphi, z) = a(\rho)\vec{e}_\rho$$

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dit *central* par rapport à un point $O \in \mathbb{R}^3$ si dans des coordonnées sphériques ayant O pour centre, il a pour expression

$$\overrightarrow{V}(r, \varphi, \theta) = a(r)\vec{e}_r$$

Exemples provenant de la physique

• Le **vecteur position** est le champ vectoriel défini en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Ses expressions en coordonnées cylindriques

$$\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{k}$$

et en coordonnées sphériques

$$\vec{V}(r, \varphi, \theta) = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k} = r\,\vec{e_r}$$

s'obtiennent en utilisant les formules vues précédemment. Elles montrent en particulier que $\vec{V}$ est un champ central.

Exemples provenant de la physique

• On a déjà rencontré le **champ gravitationnel** engendré par un corps de masse M :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(r,\varphi,\theta) = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}(r,\varphi,\theta)$$

où $G = 6,673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg\ s}^2$ est la constante gravitationnelle. Il s'agit d'un champ central. Un corps de masse m situé à une distance r du corps la masse M est alors soumis à la **force gravitationnelle**

$$\overrightarrow{F}(r,\varphi,\theta) = m\overrightarrow{\mathcal{G}}(r,\varphi,\theta) = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{e_r}(r,\varphi,\theta)$$

Exemples provenant de la physique

• Le **champ électrique** engendré par une charge Q est le champ central

$$\overrightarrow{E}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\,\vec{e_r}(r,\varphi,\theta),$$

où ϵ est la permittivité diélectrique du matériau sur lequel agit le champ. Une charge q située à distance r de la charge Q est alors soumise à la **force de Coulomb**

$$\overrightarrow{F}(r,\varphi,\theta) = q\overrightarrow{E}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qq}{r^2}\,\vec{e_r}(r,\varphi,\theta)$$

Exercices

Énoncé.– Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par

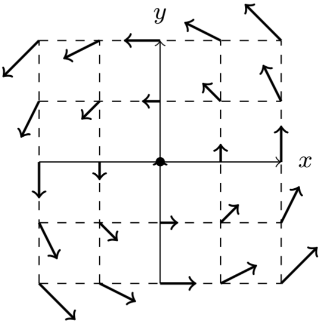
$$\vec{V}(x,y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

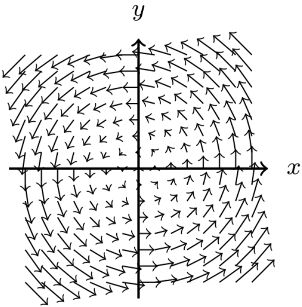
Écrire $\vec{V}$ en coordonnées polaires puis dessiner l'allure du champ.

Réponse.– Il suffit d'utiliser les formules de passage coordonnées cylindriques $\longleftrightarrow$ coordonnées cartésiennes, en posant $z = 0$. On obtient

$$\begin{aligned}
\vec{V}(\rho,\varphi) &= -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} \\
&= -\rho\sin\varphi\,\left(\cos\varphi\;\vec{e_\rho} - \sin\varphi\;\vec{e_\varphi}\right) \\
&\quad +\rho\cos\varphi\,\left(\sin\varphi\;\vec{e_\rho} + \cos\varphi\;\vec{e_\varphi}\right) \\
&= \rho\,\big(-\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad +\cos\varphi\sin\varphi\big)\;\vec{e_\rho} + \rho\,\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\;\vec{e_\varphi} \\
&= \rho\;\vec{e_\varphi}\,.
\end{aligned}$$

Exercices





Exercices

Énoncé.– Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par

$$\overrightarrow{V}(\rho, \varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\, \vec{e_\varphi}$$

Justifier le choix du domaine de définition. Écrire $\overrightarrow{V}$ en coordonnées cartésiennes.

Réponse.– Le repère mobile polaire n'est pas défini en l'origine, il faut donc $\rho \neq 0$. Quant à l'angle φ, il suffit qu'il décrive un intervalle de longueur 2π.

Pour l'écriture en coordonnées cartésiennes, on s'appuie sur les formules de passage coordonnées cylindriques $\longleftrightarrow$ coordonnées cartésiennes, avec $z = 0$.

Exercices

On a

$$\begin{aligned}
\vec{V}(x,y) &= \vec{e_\rho} + \rho\vec{e_\varphi} \\
&= \left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right) \\
&\quad +\rho\left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right) \\
&= \left(\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)\vec{i} \\
&\quad +\left(\sin\varphi + \rho\cos\varphi\right)\vec{j} \\
&= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\right)\vec{i} \\
&\quad +\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)\vec{j}.
\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = (z, y, x) = z\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x\,\vec{k}$$

Écrire $\vec{V}$ en coordonnées cylindriques et sphériques puis dessiner l'allure du champ.

Réponse.– En s'appuyant sur les formules de passage coordonnées cylindriques $\longleftrightarrow$ coordonnées cartésiennes, on obtient

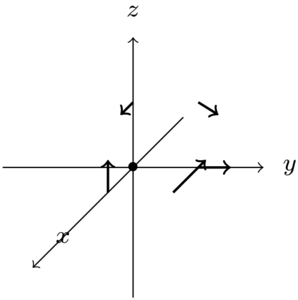
$$\begin{aligned}
\vec{V}(\rho, \varphi, z) &= z\left(\cos\varphi\, \vec{e_\rho} - \sin\varphi\, \vec{e_\varphi}\right) \\
&\quad + \rho\sin\varphi\left(\sin\varphi\, \vec{e_\rho} + \cos\varphi\, \vec{e_\varphi}\right) \\
&\quad + \rho\cos\varphi\, \vec{k} \\
&= \left(z\cos\varphi + \rho\sin^2\varphi\right) \vec{e_\rho} \\
&\quad + \left(-z\sin\varphi + \rho\cos^2\varphi\right) \vec{e_\varphi} + \rho\cos\varphi\, \vec{k}\,.
\end{aligned}$$

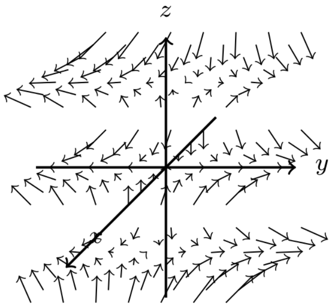
Exercices

En s'appuyant maintenant sur les formules de passage coordonnées sphériques $\longleftrightarrow$ coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) &= r\cos\theta\,\big(\cos\varphi\sin\theta\,\vec{e_r} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi} \\
&\quad + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta}\,\big) \\
&\quad + r\sin\varphi\sin\theta\,\big(\sin\varphi\sin\theta\,\vec{e_r} \\
&\quad + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi} + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta}\,\big) \\
&\quad + r\cos\varphi\sin\theta\,\big(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\,\big) \\
&= r\,\big(\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta \\
&\quad + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\big)\,\vec{e_r} \\
&\quad + r\,\big(-\sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\big)\,\vec{e_\varphi} \\
&\quad + r\,\big(\cos\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\
&\quad - \cos\varphi\sin^2\theta\big)\,\vec{e_\theta} \\
&= r\,\sin\theta(2\cos\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta)\,\vec{e_r} \\
&\quad + r\,\sin\varphi\,\big(-\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta\big)\,\vec{e_\varphi} \\
&\quad - r\,\big(\cos\varphi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\big)\,\vec{e_\theta}\,.
\end{aligned}$$

Exercices





Lignes de champ

Définition.– Une *ligne de champ* ou *courbe intégrale* d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) est une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$ telle que en tout point $t \in I$ on a :

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t)).$$

• Par conséquent,

$$t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

est une ligne de champ de $\overrightarrow{V} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ si et seulement si

$$\forall t \in \ I, \quad \begin{cases} x'(t) = a\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ y'(t) = b\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ z'(t) = c\big(x(t), y(y), z(t)\big) \end{cases}$$

Lignes de champ

Remarque.– Dans la formule $\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$, la dérivée $\gamma'(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ alors que $\gamma(t)$ est un point de D.

• Si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^{\Phi} \circ \Omega^{-1}$ est exprimé dans un repère mobile Φ, elle se transforme donc ainsi

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}^{\Phi}(\Omega^{-1}(\gamma(t)))$$

avec $\overrightarrow{V}^{\Phi} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega : A \longrightarrow D$ et $\gamma : I \longrightarrow D$.

Exercices

Énoncé.– Déterminer et dessiner les lignes de champ de $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ où $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

Réponse.– Une courbe $t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ est une ligne de champ si et seulement si

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}\big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

i.e.

$$\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) = \big(-y(t), x(t), 0\big)$$

c'est-à-dire

$$(\Sigma) \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

Exercices

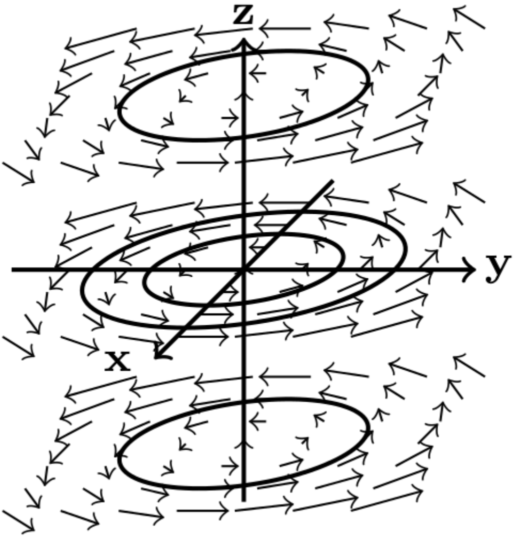
Posons $w(t) := x(t) + iy(t)$. On a

$$(\Sigma) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} w'(t) & = & iw(t) \\ z(t) & \equiv & C^{te} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} w(t) & = & w(t_0)e^{i(t-t_0)} \\ z(t) & \equiv & C^{te} \end{array} \right.$$

Ainsi, la ligne de champ passant par le point (x_0, y_0, z_0) est un cercle du plan $\{z = z_0\}$ de centre $(0, 0, z_0)$ et de rayon $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

En particulier chaque point de la droite $\{x = 0, y = 0\}$ est fixe sous l'action du champ $\overrightarrow{V}$.

Exercices



Exercices

Énoncé.– Soit $\overrightarrow{U} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \|\overrightarrow{U}(t)\| \equiv Cte$$

Montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$\langle \overrightarrow{U}'(t), \overrightarrow{U}(t) \rangle = 0.$$

Réponse.– Notons que nécessairement

$$\forall t \in I, \quad \|\overrightarrow{U}(t)\|^2 \equiv Cte^2$$

D'une part, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\|\overrightarrow{U}(t)\|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(Cte^2\right) = 0.$$

Exercices

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\vec{U}(t)\|^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(\langle \vec{U}(t), \vec{U}(t)\rangle\right)\\ &= \langle \tfrac{d}{dt}\vec{U}(t), \vec{U}(t)\rangle + \langle \vec{U}(t), \tfrac{d}{dt}\vec{U}(t)\rangle\\ &= 2\langle \tfrac{d}{dt}\vec{U}(t), \vec{U}(t)\rangle\end{aligned}$$

En égalant les deux équations, on obtient

$$\langle \frac{d}{dt}\vec{U}(t), \vec{U}(t)\rangle = 0.$$

Exercices

Énoncé.– Déterminer et dessiner les lignes du champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e}_r\,(r,\varphi,\theta)$

Réponse.– Le champ gravitationnel est exprimé en coordonnées sphériques. Une courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\backslash\{O\} \\ & t & \longmapsto & (x(t),y(t),z(t)) \end{array}$$

est une ligne de champ si et seulement si

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(\Omega^{-1}(\gamma(t)))$$

avec

$$\Omega(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\ \cos\varphi\sin\theta \\ r\ \sin\varphi\sin\theta \\ r\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercices

- Pour tout $t \in I$, on pose

$$(r(t), \varphi(t), \theta(t)) := \Omega^{-1}(\gamma(t))$$

autrement dit

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= r(t)(\cos\ \varphi(t)\sin\theta(t)\vec{i} + \sin\ \varphi(t)\sin\theta(t)\vec{j} + \cos\varphi(t)\vec{k}) \\ &= r(t)\vec{e_r}\,(r(t), \varphi(t), \theta(t))\end{aligned}$$

Ainsi, γ est une ligne de champ si et seulement si

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r(t), \varphi(t), \theta(t)) = -\frac{GM}{r^2(t)}\ \vec{e_r}\,(r(t), \varphi(t), \theta(t))$$

- Pour alléger les notations, on pose

$$\vec{u}(t) = \vec{e_r}\,(r(t), \varphi(t), \theta(t)) \ \text{ d'où } \ \gamma(t) = r(t)\vec{u}(t).$$

Exercices

- On a donc

$$\gamma'(t) = r'(t)\vec{u}(t) + r'(t)\vec{u}'(t)$$

avec $\langle \vec{u}(t), \vec{u}'(t) \rangle = 0$ d'après l'exercice précédent.

- Ainsi

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r(t), \varphi(t), \theta(t))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r'(t)\vec{u}(t) + r'(t)\vec{u}'(t) = -\frac{GM}{r^2(t)}\vec{u}(t)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{ccccc} r'(t) & = & -\dfrac{GM}{r^2(t)} & (1) \\ r'(t)\vec{u}'(t) & = & 0 & (2) \end{array}\right.$$

Exercices

• Puisque pour tout $t \in I$, $r(t) > 0$, on a

$$r'(t) = -\frac{GM}{r(t)^2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r(t)^2\, r'(t) = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(r(t)^3\right) = -GM$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r(t)^3 = -3GM(t - t_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r(t) = \sqrt[3]{3GM(t_0 - t)}.$$

• La condition $r(t) > 0$ impose $t < t_0$ et on a

$$\lim_{t \longrightarrow t_0, t < t_0} r(t) = 0.$$

Exercices

• On a aussi $r'(t) \neq 0$ pour tout $t < 3GMt_0$, ainsi

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} r(t) = \sqrt[3]{3GM(t_0 - t)} & (1) \\ u'(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

• On pose $t_1 := t_0 - \frac{1}{3GM}$. On a donc $r(t_1) = 1$. L'équation (2) montre que $t \mapsto \vec{u}(t)$ est constant. En particulier,

$$\forall t \in]-\infty, t_0[, \quad \vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{O\gamma(t)}}{r(t)} = \overrightarrow{O\gamma(t_1)}$$

et

$$\forall t \in]-\infty, t_0[, \quad \gamma(t) = \sqrt[3]{3GM(t_0 - t)}\ \overrightarrow{O\gamma(t_1)}.$$

• Ceci montre que les lignes de champ sont des demi-droites radiales. Le champ est dit *attractif* car $\lim_{t \longrightarrow t_O} \gamma(t) = O$.

Exercices

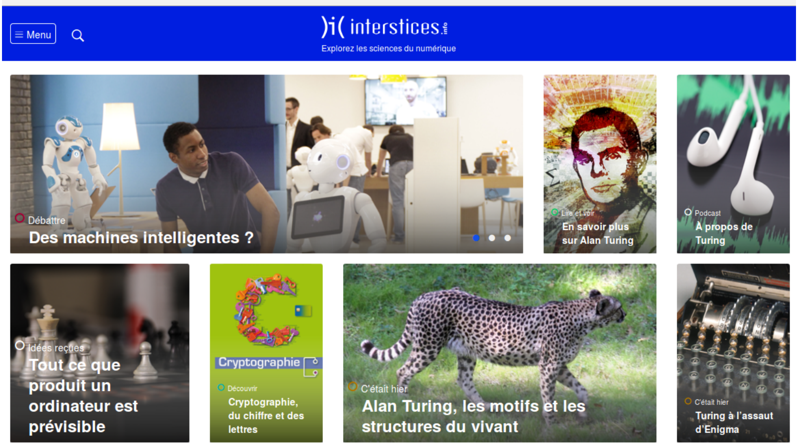
Énoncé.– Déterminer et dessiner les lignes du champ gravitationnel $\overrightarrow{E}^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{Q}{r^2}\ \vec{e_r}\,(r,\varphi,\theta)$

Réponse.– Le champ électrique ne diffère du champ gravitationnel que d'une constante. La démarche et les calculs sont donc les mêmes que pour l'exercice précédent, à une constante près. Néanmoins comme cette constante est négative, elle influe sur le sens de parcours des lignes de champ. Celles-ci restent des demi-droites radiales mais elles sont parcourues en sens inverse, le champ est dit *répulsif*.

Fin CM 8

Images des Mathématiques

Fin CM 8



Interstices

Champ gradient, champ rotationnel

Définition.– Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, le *gradient* de ϕ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k}$$

• En coordonnées cylindriques, ce champ a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k}$$

• et en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta}$$

Champ gradient

Proposition.– Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x, y, z) = a\}$$

la surface de niveau a. Alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est un vecteur normal à S_a. Ceci signifie que pour toute courbe $\gamma : I \longrightarrow S_a$ et tout $t \in I$, on a

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

Exemple

• Soit $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par $\phi(r,\varphi,\theta) = r\sin\varphi\cos\theta$. Le gradient de ϕ est

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(r,\varphi,\theta) &= \frac{\partial(r\sin\varphi\cos\theta)}{\partial r}\ \vec{e_r} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial(r\sin\varphi\cos\theta)}{\partial\varphi}\ \vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r}\ \frac{\partial(r\sin\varphi\cos\theta)}{\partial\theta}\ \vec{e_\theta} \\
&= \sin\varphi\sin\theta\ \vec{e_r} + \frac{r\cos\varphi\cos\theta}{r\cos\theta}\ \vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{-r\sin\varphi\sin\theta}{r}\ \vec{e_\theta} \\
&= \sin\varphi\sin\theta\ \vec{e_r} + \cos\varphi\ \vec{e_\varphi} - \sin\varphi\sin\theta\ \vec{e_\theta}
\end{aligned}
$$

Proposition

Proposition.– *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *On a :*

$$\overrightarrow{\nabla}(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, \overrightarrow{\nabla} f + \mu\, \overrightarrow{\nabla} g$$

et

$$\overrightarrow{\nabla}(f\, g) = \left(\overrightarrow{\nabla} f\right)\, g + f\, \left(\overrightarrow{\nabla} g\right).$$

Définition.– Soit $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

• On dit que $\overrightarrow{V}$ est un *champ de gradient* s'il existe $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$.

• On dit que $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est un *potentiel scalaire* de $\overrightarrow{V}$ si $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$ (attention au signe !)

Force conservative

Remarque.– En physique, si un champ de force $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de gradient, on dit que la force $\overrightarrow{F}$ est *conservative*

Exemple 1.– La force gravitationnelle $\overrightarrow{F}(r) = m\overrightarrow{\mathcal{G}}(r)$ et la force de Coulomb $\overrightarrow{F}(r) = q\overrightarrow{E}(r)$ sont conservatives. Les potentiels sont

$$\phi(r) = -\frac{mGM}{r} \quad \text{et} \quad \phi(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Exemple 2.– La force de Lorentz

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

est la force subi par une particule de charge électrique q et de vitesse $\vec{v}$ sous l'action d'un champ électrique (externe) $\overrightarrow{E}$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. Elle n'est pas conservative en général.

Champ rotationnel

Définition.– Soit

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{V} : & D \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k} \end{array}$$

un champ de vecteurs. Le *rotationnel* de $\overrightarrow{V}$ est le champ de vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\ \vec{i} + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)\ \vec{j} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\ \vec{k}$$

- On écrit souvent

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$$

Champ rotationnel

- En coordonnées cylindriques

$$\vec{V}(\rho,\varphi,z) = a'(\rho,\varphi,z)\vec{e_\rho} + b'(\rho,\varphi,z)\vec{e_\varphi} + c'(\rho,\varphi,z)\vec{k}$$

le rotationnel de $\vec{V}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial c'}{\partial \varphi} - \frac{\partial b'}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} \\ &+ \left(\frac{\partial a'}{\partial z} - \frac{\partial c'}{\partial \rho}\right)\vec{e_\varphi} \\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\, b')}{\partial \rho} - \frac{\partial a'}{\partial \varphi}\right)\vec{k} \end{aligned}$$

Champ rotationnel

- En coordonnées sphériques

$$\vec{V}(\rho,\varphi,\theta) = a''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\rho} + b''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\varphi} + c''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\theta}$$

le rotationnel de $\vec{V}$ a pour expression :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \frac{1}{r\cos\theta}\left(\frac{\partial c''}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\cos\theta\; b'')}{\partial\theta}\right)\vec{e_\rho} \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a''}{\partial\theta} - \frac{\partial(rc'')}{\partial r}\right)\vec{e_\varphi} \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rb'')}{\partial r} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial a''}{\partial\varphi}\right)\vec{e_\theta}\end{aligned}$$

Exemples

Exemple 1.– Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial\, 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial\, 0}{\partial x}\right)\vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + (1+1)\cdot\vec{k} = 2\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Exemple 2.– Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + (2y)\cdot\vec{k} = 2y\,\vec{k}$$

Exemples

Exemple 3.– Soit $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi,z) = \sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \rho\,\vec{k}$. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}(\rho,\varphi,z) &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial\sin\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\cdot 0)}{\partial\rho} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{k} \\ &= -\vec{e_\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Exemples

Exemple 4.– Soit $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \sin\varphi\ \vec{e_r} + r\ \vec{e_\theta}$. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{V}(r,\varphi,\theta) &= \frac{1}{r\ \sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\cdot 0)}{\partial\theta} - \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)\ \vec{e_r} \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r} - \frac{\partial \sin\varphi}{\partial\theta}\right)\ \vec{e_\varphi} \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\cdot 0)}{\partial r}\right)\ \vec{e_\theta} \\
&= \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ \vec{e_r} + \frac{2r}{r}\ \vec{e_\varphi} \\
&= \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ \vec{e_r} + 2\ \vec{e_\varphi}\,.
\end{aligned}$$

Proposition

Proposition.– *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $\vec{U}, \vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *On a :*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\lambda\,\vec{U} + \mu\,\vec{V}) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$$

et de plus, si $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, *on a*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = 0$$

Définition.– On dit que $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est *irrotationnel* si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0$.

• D'après la proposition, tout champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est irrotationnel.

• La réciproque est fausse en général. Elle dépend en partie de la topologie de D.

Lemme de Poincaré

Définition.– Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* si pour tout couple de point $(p, q) \in D \times D$ il existe une courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$.

• Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est dit *simplement connexe* si pour toute courbe continue fermée $\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$, $\gamma(0) = \gamma(1)$ il existe une application continue

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow D$$

telle que $H(0, .) = \gamma(.)$, $H(1, .) = \gamma(0)$ et pour tout $u \in [0, 1]$, $H(u, 0) = H(u, 1)$

• Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est dit *étoilé* s'il existe un point $\Omega \in D$ tel que pour tout $p \in D$, on a $[\Omega, p] \subset D$.

Lemme de Poincaré

Proposition.– *Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé alors il est simplement connexe.*

Lemme de Poincaré I.– *Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ simplement connexe et $\overrightarrow{V} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Alors*

$$\exists \phi : D \longrightarrow \mathbb{R} \ \ t.q. \ \ \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi \iff \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V} = 0.$$

Méthode pour déterminer ϕ.– Supposons

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = a(x,y,z)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k}$$

et cherchons ϕ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$ i. e. tel que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = c.$$

Lemme de Poincaré

- On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = a \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = \int a(x,y,z)\, dx + g(y,z)$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial y} = b \quad &\Rightarrow \quad b = \int \frac{\partial a}{\partial y}\, dx + \frac{\partial g}{\partial y} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = b - \int \frac{\partial a}{\partial y}\, dx \\
&\Rightarrow \quad g = \int b\, dy - \int\int \frac{\partial a}{\partial y}\, dxdy + h(z)
\end{aligned}$$

et donc

$$\phi(x,y,z) = \int a\, dx + \int b\, dy - \int\int \frac{\partial a}{\partial y}\, dxdy + h(z)$$

Lemme de Poincaré

- On en déduit

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = c \quad \Rightarrow \quad c = \int \frac{\partial a}{\partial z}\, dx + \int \frac{\partial b}{\partial z}\, dy - \int\int \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}\, dxdy + \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial z} = c - \int \frac{\partial a}{\partial z}\, dx - \int \frac{\partial b}{\partial z}\, dy + \int\int \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}\, dxdy$$

d'où

$$h = \int c\, dz - \int\int \frac{\partial a}{\partial z}\, dxdz - \int\int \frac{\partial b}{\partial z}\, dydz + \int\int\int \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}\, dxdydz$$

Lemme de Poincaré

- On remplace dans

$$\phi(x,y,z) = \int a\,dx + \int b\,dy - \int\int \frac{\partial a}{\partial y}\,dxdy + h(z)$$

pour obtenir

$$\phi(x,y,z) = \int a\,dx + \int b\,dy + \int c\,dz$$

$$-\int\int \frac{\partial a}{\partial y}\,dxdy - \int\int \frac{\partial a}{\partial z}\,dxdz - \int\int \frac{\partial b}{\partial z}\,dydz$$

$$+\int\int\int \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}\,dxdydz$$

Exemples

Exemple.– Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} + (x^2 + z)\,\vec{j} + y\,\vec{k}$$

• Un simple calcul montre que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0$ et puisque $D = \mathbb{R}^3$ est étoilé, D est simplement connexe et le lemme de Poincaré assure l'existence de $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

• Pour déterminer ϕ, il nous faut résoudre

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = y.$$

• On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \phi(x, y, z) = \int 2xy\,dx + g(y, z) = x^2y + g(y, z).$$

Exemples

- On en déduit

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}$$

La seconde équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z$$

impose donc

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = z \text{ d'où } g(y,z) = \int z\, dy + h(z) = zy + h(z)$$

En reportant dans l'expression de ϕ on obtient

$$\phi(x,y,z) = x^2 y + zy + h(z).$$

- Ainsi

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = y + h'(z).$$

Exemples

La troisième équation impose

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = y \quad \text{d'où} \quad h'(z) = 0 \quad \text{i. e.} \quad h(z) = Cte$$

On peut choisir cette constante égale à zéro car

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\phi + Cte).$$

Au bilan

$$\phi(x, y, z) = x^2 y + zy.$$

Exemples

Exemple.– Soit $\overrightarrow{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ le champ gravitationnel. On admet que le domaine de définition $D = \mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ de ce champ est simplement connexe. Un simple calcul montre que

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathcal{G}}(r) = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{GM}{r^2}\right)\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\frac{GM}{r^2}\right)\,\vec{e_\theta} = 0.$$

Ainsi, d'après le lemme de Poincaré, il existe ϕ tel que $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

- En coordonnées sphériques, on cherche donc ϕ telle que

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\varphi,\theta)\vec{e_r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(r,\varphi,\theta)\vec{e_\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\varphi,\theta)\vec{e_\theta} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e_r}$$

Exemples

- On en déduit

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\varphi,\theta)=\frac{GM}{r^2},\qquad \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(r,\varphi,\theta)=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\varphi,\theta)=0$$

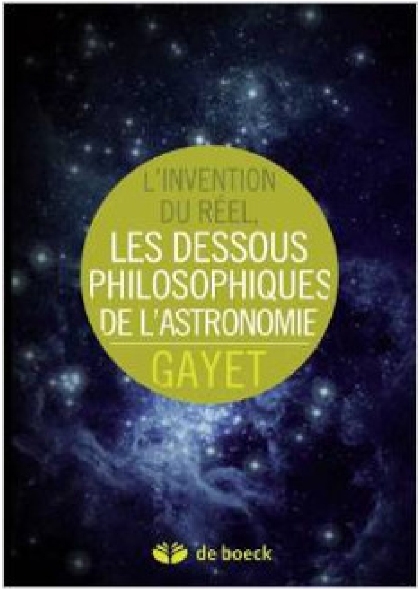
Les deux dernières équations montrent que ϕ ne dépend que de la variable r. La première équation devient donc $\phi'(r)=\dfrac{GM}{r^2}$ d'où

$$\phi(r)=-\frac{GM}{r}$$

Exemple.– Pour le champ électrique $\vec{E}(r)=\dfrac{Q}{4\pi\epsilon}\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$, le potentiel ϕ se calcule de la même façon. On obtient

$$\phi(r)=\frac{Q}{4\pi\epsilon}\,\frac{1}{r}$$

Fin CM 9


L'INVENTION
DU RÉEL,
LES DESSOUS
PHILOSOPHIQUES
DE L'ASTRONOMIE
GAYET
de boeck

La divergence

Définition.– Soit

$$\begin{array}{rccc} \vec{V} : & D \subset \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C^\infty} & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & a(x,y,z)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k} \end{array}$$

un champ de vecteur. La *divergence* de $\vec{V}$ est l'application $\operatorname{div} \vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\operatorname{div} \vec{V} = tr\, J_{\vec{V}} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

La divergence

- En coordonnées cylindriques

$$\vec{V}(\rho,\varphi,z) = a'(\rho,\varphi,z)\vec{e_\rho} + b'(\rho,\varphi,z)\vec{e_\varphi} + c'(\rho,\varphi,z)\vec{k}$$

la divergence de $\vec{V}$ a pour expression :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\; a')}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial b'}{\partial \varphi} + \frac{\partial c'}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques

$$\vec{V}(\rho,\varphi,\theta) = a''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\rho} + b''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\varphi} + c''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\theta}$$

la divergence de $\vec{V}$ a pour expression :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\; a'')}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial b''}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial(\cos\theta\; c'')}{\partial \theta}$$

Exemples

Exemples.– Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$, alors on a

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = 0$$

• Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, on a

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = 2x + 2x + 1 = 4x + 1$$

• Soit $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ on a

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) = 0$$

Proposition

Proposition.– *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $\vec{U}, \vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *On a :*

$$\mathrm{div}\,(\lambda\,\vec{U} + \mu\,\vec{V}) = \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{V}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(f\vec{V}) &= f\,\mathrm{div}\,\vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \vec{V} \\
\mathrm{div}\,(\vec{U} \wedge \vec{V}) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{V}) \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) &= \Delta f \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}) &= 0 \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{V}) &= \Delta\vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}
\end{aligned}$$

où $\Delta\vec{V}$ *désigne le laplacien vectoriel, c'est-à-dire le laplacien sur chacune des coordonnées cartésiennes de* $\vec{V}$

Incompressibilité

Définition.– Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est dit *à divergence nulle* si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}=0$. Dans ce cas, si le champ $\overrightarrow{V}$ décrit la vitesse d'écoulement d'un fluide, on dit que le fluide est *incompressible*.

• Plus généralement, si un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ décrit un courant de matière et si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}=0$, le champ est dit *solénoïdal* (du grec *sôlen* = tuyau) : le volume de matière transportée est constant (comme s'il était contraint dans un tuyau).

• Par exemple, un champ de gradient $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est solénoïdal si et seulement si

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi)=\Delta\phi=0$$

c'est-à-dire si et seulement si la fonction ϕ est harmonique.

Invariance de jauge

• Puisque $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}) = 0$, tout champ rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ est à divergence nulle.

Définition.– Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Si $\vec{U} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$, on dit que $\vec{U}$ est un *potentiel vectoriel* de $\vec{V}$. Dans ce cas, le champ $\vec{V}$ est nécessairement à divergence nulle.

• Si $\vec{U}$ est un potentiel vectoriel de $\vec{V}$ alors pour tout $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, le champ $\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est encore un potentiel vectoriel de $\vec{V}$. En effet, puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = 0$, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{U} + \vec{\nabla}\phi\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{V}$$

• Cette liberté dans le choix du potentiel vectoriel d'un champ à divergence nulle s'appelle l'*invariance de jauge*.

Ensemble contractile

• Tout champ rotationnel est à divergence nulle mais la réciproque est fausse. Elle dépend en partie de la topologie de D.

Définition.– Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit *contractile* s'il se déforme continûment en un point $\Omega \in D$.

• Autrement dit, D est contractile s'il existe une application continue $H : D \times [0,1] \longrightarrow D$ telle que $H(\Omega, t) = \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, $H(x,0) = x$ et $H(x,1) = \Omega$ pour tout $x \in D$.

Proposition.– *Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé (par rapport à $\Omega \in D$) alors D est contractile (sur le point Ω)*

Revoilà Poincaré !

Lemme de Poincaré II.– *Soit* $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un champ de vecteurs sur* D *<u>contractile</u>. Alors*

$$\exists \overrightarrow{U} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t.\,q. \quad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} \iff \mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = 0$$

Détermination de $\overrightarrow{U}$**.–** Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$V(x,y,z) = a(x,y,x)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k}$$

et tel que

$$\mathrm{div}\, V = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Puisque $\mathbb{R}^3$ est contractile (car étoilé), d'après le lemme de Poincaré, il existe un potentiel vectoriel $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

• Notons $\vec{U} = f\,\vec{i} + g\,\vec{j} + h\,\vec{k}$ ce potentiel vectoriel. La relation $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ signifie que

$$(1)\ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = a, \quad (2)\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = b, \quad (3)\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c.$$

• Ce système est sous-déterminé : les dérivées partielles de f, g et h sont au nombre de neuf et il n'y a que trois équations.

• Deux solutions de ce système sous-déterminé (i.e. deux potentiels vectoriels) $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ diffèrent d'un gradient de fonction :

$$\exists \phi \text{ t. q. } \vec{U}_2 - \vec{U}_1 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

Exemple 1.– Supposons $\overrightarrow{V} = 0$ et cherchons les potentiels vectoriels $\overrightarrow{U}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = 0$. On doit résoudre

$$(1)\ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (2)\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3)\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

- La première équation équivaut à

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= \int \frac{\partial g}{\partial z} dy + \lambda_1(x,z) \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\int g dy + \frac{\partial}{\partial z}\int \lambda_1(x,z)dz \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z)\big) \end{aligned}$$

avec $G(x,y,z) = \int g dy$ et $\Lambda_1(x,z) = \int \lambda_1(x,z)dz$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

• La seconde équation $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ montre que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int \frac{\partial h}{\partial x} dz + \lambda_2(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int h dz + \lambda_2(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z)\big) + \lambda_2(x,y) \end{aligned}$$

car $h(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z)\big)$.

• La troisième équation $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ impose

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z)\big)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\lambda_2(x,y)$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

Soit encore

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}(G(x,y,z)+\Lambda_1(x,z))\right)+\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)+\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

car $G(x,y,z)=\int g dy$ Il faut donc $\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}(x,y)=0$. Autrement dit, λ_2 ne doit dépendre que de x.

• Notons $\Lambda_2(x)=\int \lambda_2(x)dx$. Au bilan on a

$$h(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(G(x,y,z)+\Lambda_1(x,z)+\Lambda_2(x))$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

et

$$g(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) + \Lambda_2(x)\big)$$

$$f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) + \Lambda_2(x)\big)$$

soit encore

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(G + \Lambda_1 + \Lambda_2).$$

Exemple 2.– Supposons $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = c(x,y)\vec{k}.$$

Puisque $\mathbb{R}^3$ est contractile (car étoilé) et que $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{\partial c}{\partial z}\vec{k} = 0$, le lemme de Poincaré assure l'existence de $\overrightarrow{U} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

• Puisque $\vec{V}$ ne dépend pas de z, on cherche un potentiel

$$\vec{U}(x,y) = f(x,y)\,\vec{i} + g(x,y)\,\vec{j} + h(x,y)\,\vec{k}$$

indépendant de z.

• En particulier $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial z} = 0$. Les équations

$$(1)\ \ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (2)\ \ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3)\ \ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c$$

deviennent

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0, \ \ \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \ \ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c$$

Ainsi $h \equiv Cte$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

- On cherche donc $\overrightarrow{U}$ sous la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y) = f(x,y)\,\vec{i} + g(x,y)\,\vec{j} + Cte\,\vec{k}$$

avec pour seule contrainte

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c$$

- On obtient

$$g(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \int c(x,y)dx$$

Les solutions de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$ sont donc les champs $\overrightarrow{U}$ de la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y) = f(x,y)\,\vec{i} + \left(\int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \int c(x,y)dx\right)\vec{j} + Cte\,\vec{k}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque des variables x et y.

Détermination d'un potentiel vectoriel

- Notons que $\vec{U}$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\vec{U}(x,y) &= \left(\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx\right)\vec{i} + \left(\int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\right)\vec{j} \\ &\quad + \left(\int \frac{\partial f}{\partial z}(x,y)dx\right)\vec{k} + \left(\int c(x,y)dx\right)\vec{j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x,y)dx\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int f(x,y)dx\right)\vec{j} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int f(x,y)dx\right)\vec{k} + \left(\int c(x,y)dx\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Posons $F(x,y) = \displaystyle\int f(x,y)dx$, on a donc

$$\vec{U}(x,y) = \left(\int c(x,y)dx\right)\vec{j} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

Application.– Cherchons les potentiels vectoriels $\vec{U}$ de

$$\vec{V}(x,y,z) = (xy^2 - x^3y)\,\vec{k}$$

où $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a $c(x,y) = xy^2 - x^3y$ et donc

$$\int c(x,y)dx = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4y + cte$$

d'où

$$\vec{U}(x,y) = (\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4y + cte)\,\vec{j} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F$$

avec $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque des variables x et y.

Exercice

Énoncé.– Le champ magnétique engendré par un courant d'intensité I passant dans un fil vertical a pour expression

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}\right),$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k}$.

1) Ecrire $\overrightarrow{B}$ en coordonnées cylindriques.

Réponse.– L'expression de $\overrightarrow{B}$ en coordonnées cylindriques est :

$$\widetilde{\overrightarrow{B}}(\rho,\varphi,z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left(-\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\,\vec{i} + \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\,\vec{j}\right) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}\,.$$

Exercice

Énoncé.– 2) Une particule de charge q placée en (x, y, z) subit une force

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = q\ \overrightarrow{B}(x, y, z)$$

due au champ (c'est la force de Lorenz). Que vaut $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{F}$?

Réponse.– On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 q\, I}{2\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)\ \vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{1}{\rho}\right)\ \vec{k}\right] = 0.$$

Énoncé.– 3) Soit $D \subset \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ un sous-domaine simplement connexe. Montrer que $\overrightarrow{F}$ est conservative sur D et déterminer un potentiel $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice

Réponse.– Puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = 0$ et que D est simplement connexe, le lemme de Poincaré assure l'existence de $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \vec{F}$. Ainsi $\vec{F}$ est conservative sur D.

• Puisque

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k}$$

il faut résoudre

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 q\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

La première et la troisième équation montrent que ϕ ne dépend que de φ. La seconde équation permet d'écrire

$$\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,(\varphi + \varphi_0)$$

Exercice

Remarque.– La force $\vec{F}$ n'est pas conservative sur $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$. En particulier, le potentiel trouvé ci-dessus ne se prolonge pas sur $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ (comparer $\phi(0)$ et $\phi(2\pi)$).

Énoncé.– 4) Calculer $div\,\vec{B}$.

Réponse.– On a

$$\operatorname{div} \vec{B}(\rho,\varphi,z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Énoncé.– 5) Déterminer un potentiel vectoriel $\vec{A}$ de $\vec{B}$.

Réponse.– Écrivons $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z) = f(\rho,\varphi,z)\;\vec{e_\rho} + g(\rho,\varphi,z)\;\vec{e_\varphi} + h(\rho,\varphi,z)\;\vec{k}$$

Exercice

Puisque

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\ \vec{e_\rho} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)\ \vec{e_\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\ \left(\frac{\partial(\rho\, g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\ \vec{k}\end{aligned}$$

on a $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}$ si et seulement si

$$(1)\quad \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0, \quad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ \frac{1}{\rho}$$

et

$$(3)\quad \frac{1}{\rho}\ \left(\frac{\partial(\rho g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

Exercice

• Puisque $\overrightarrow{B}$ est indépendant de z, on cherche $\overrightarrow{A}$ sous la forme

$$\overrightarrow{A}(\rho, \varphi, z) = f(\rho, \varphi)\ \vec{e_\rho} + g(\rho, \varphi)\ \vec{e_\varphi} + h(\rho, \varphi)\ \vec{k}$$

et les équations deviennent

$$(1)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0, \qquad (2)\quad -\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}$$

et

$$(3)\quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

• L'équation (1) montre que h ne dépend pas de φ ; l'équation (2) s'intègre immédiatement en

$$h(\rho) = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\ \ln \rho + cte$$

Exercice

• L'équation (3) est trivialement satisfaite si $g = f \equiv 0$. Un potentiel est donc donné par

$$\overrightarrow{A} = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, \ln \rho\, \vec{k}$$

Remarque.– Ce potentiel est défini sur tout $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ (qui pourtant n'est pas contractile).

Champ scalaire

Définition.– Un *champ scalaire* est une application $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Les mots « champ scalaire » et « fonction réelle de plusieurs variables » sont donc synonymes. L'appellation « champ scalaire » est souvent utilisée par les physiciens.

• Dans la pratique $n = 2$ ou 3. Si $n = 3$, on représente le champ scalaire en dessinant ses surfaces de niveau

$$S_a(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x, y, z) = a\}$$

Exemples

• Dans $\mathbb{R}^3$, la **distance** depuis l'origine est le champ scalaire défini par

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

En coordonnées sphériques l'expression de ce champ est particulièrement simple puisque $d(r,\varphi,\theta) = r$.

• L'**évaluation** d'une coordonnée (ici la première coordonnée cartesienne) est le champ scalaire de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\pi(x,y,z) = x$$

Exemples

• Le **potentiel gravitationnel** engendré par une masse M située en $(0,0,0)$ est le champ scalaire de $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ défini par

$$V(x,y,z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

En coordonnées sphériques l'expression de ce champ est particulièrement simple puisque $V(r,\varphi,\theta) = -\frac{GM}{r}$.

• Le **potentiel électrostatique** engendré par une charge Q située en $(0,0,0)$, aussi appelé **potentiel de Coulomb**, est le champ scalaire de $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ défini par

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

En coordonnées sphériques l'expression de ce champ est particulièrement simple puisque $\phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$.

Exercices

Énoncé.– Décrire les surfaces de niveau des potentiels gravitationnel V et de Coulomb ϕ.

Réponse.– Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_a(V) &= \left\{(r,\varphi,\theta) \mid -\frac{GM}{r} = a\right\} \\ &= \left\{(r,\varphi,\theta) \mid r = -\frac{GM}{a}\right\} \\ S_a(\phi) &= \left\{(r,\varphi,\theta) \mid \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = a\right\} \\ &= \left\{(r,\varphi,\theta) \mid r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\right\} \end{aligned}$$

Ces surfaces sont soit le vide, soit des sphères centrées en l'origine et dont le rayon dépend de a (attention au signe).

Culture : le théorème de Helmholtz-Hodge

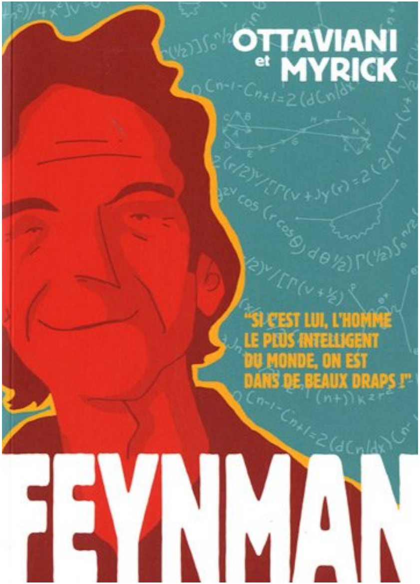
Théorème H-H.– *Tout champ de vecteur* $\overrightarrow{V}$ *est la somme* $\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$ *d'un champ de gradient* $\overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ *et d'un champ rotationnel* $\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,U$.

Ce résultat est également appelé *théorème fondamental du calcul vectoriel*

Fin CM 10


DOSSIER POUR LA SCIENCE
GÉOMÉTRIE
Triangle, rectangle, cercle... Ils n'ont pas livré tous leurs secrets.
FRACTALES LISSES
À quoi ressemble un carré transformé en un tore où toutes les longueurs sont conservées ?
Quand les MATHS prennent formes
AVANT-PROPOS DE CÉDRIC VILLANI
Formes élémentaires
Fractales
Naissance des formes
DOSSIER POUR LA SCIENCE - MATHÉMATIQUES - GÉOMÉTRIE - DESIGN - MORPHOGENÈSE - FRACTALES
N° 91 Avril-Juin 2016
pourlascience.fr

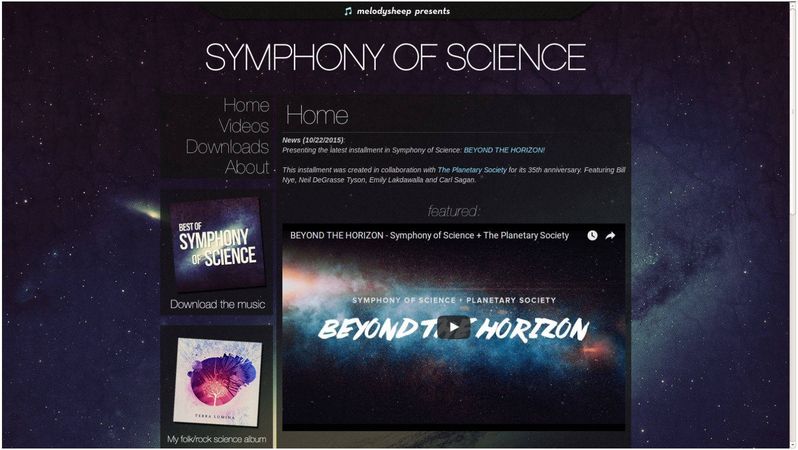
Fin CM 10


OTTAVIANI
et MYRICK
"SI C'EST LUI, L'HOMME
LE PLUS INTELLIGENT
DU MONDE, ON EST
DANS DE BEAUX DRAPS !"
FEYNMAN

Fin CM 10


BONJOUR, C'EST VOUS FEYNMAN? JE VIENS À VOTRE SÉMINAIRE. MAIS D'ABORD, IL Y A DU THÉ?
EUH... C'EST LÀ-BAS.
MERCI.
AU MOINS J'AVAIS RÉPONDU JUSTE À LA PREMIÈRE QUESTION D'EINSTEIN.

Fin CM 10


melodysheep presents
SYMPHONY OF SCIENCE
Home
Videos
Downloads
About
Home
News (10/22/2015):
Presenting the latest installment in Symphony of Science: BEYOND THE HORIZON!
This installment was created in collaboration with The Planetary Society for its 35th anniversary. Featuring Bill Nye, Neil DeGrasse Tyson, Emily Lakdawalla and Carl Sagan.
featured:
BEYOND THE HORIZON - Symphony of Science + The Planetary Society
SYMPHONY OF SCIENCE + PLANETARY SOCIETY
BEST OF SYMPHONY OF SCIENCE
Download the music
TERRA LUMINA
My folk/rock science album