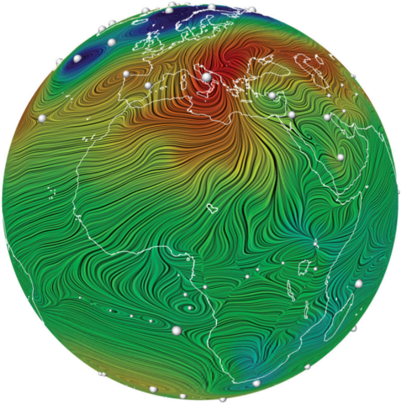
Circulation et flux

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le programme

Partie I : Fonctions (6 semaines)

CM 1.– Coordonnées, topologie
CM 2.– Fonction, graphe, composition
CM 3.– Limite, différentielle
CM 4.– Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5.– Hessienne, Taylor, extrema
CM 6.– Intégrales simples et doubles
CM 7.– Intégrales triples et applications

Le programme

Partie II : Champs de vecteurs (5 semaines)

CM 8.– Champs de vecteurs et lignes de champs
CM 9.– Champs conservatifs
CM 10.– Champs incompressibles
CM 11.– Circulation sur les courbes
CM 12.– Flux et surfaces

Adresses utiles

Deux adresses :

`http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Cours_Math2`

`http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/`

Chapitre 5
Circulation et flux d'un champ vectoriel

Dans ce chapitre :

1. Circulation sur les courbes
2. Flux et surfaces

Courbes paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de « courbe ». En voilà trois :

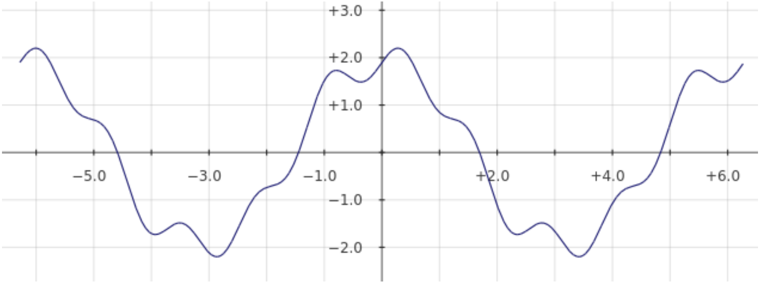
• au moyen des **graphes** de fonctions d'une variable

• au moyen d'équations implicites : on parle alors de **courbes définies implicitement**

• au moyen d'un paramètre, le temps t : on parle alors de **courbes paramétrées**

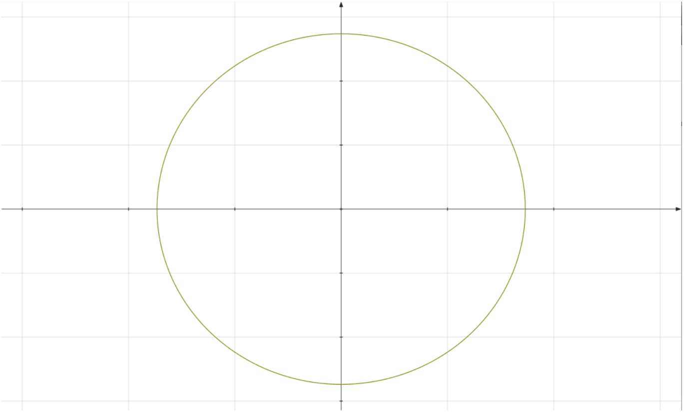
Dans ce chapitre, on donne la préférence aux courbes paramétrées.

Graphes



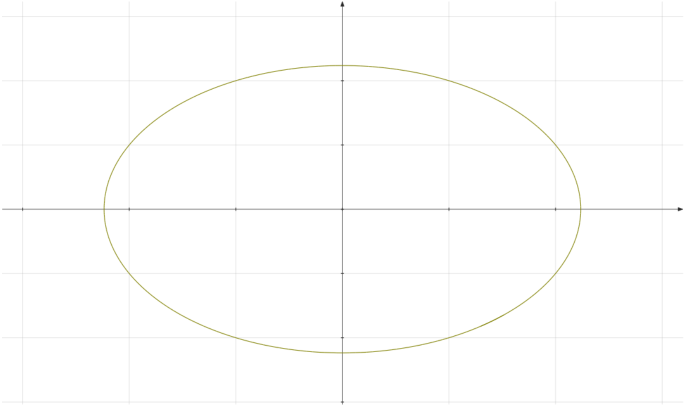
$$y = f(x)$$

Courbes définies implicitement



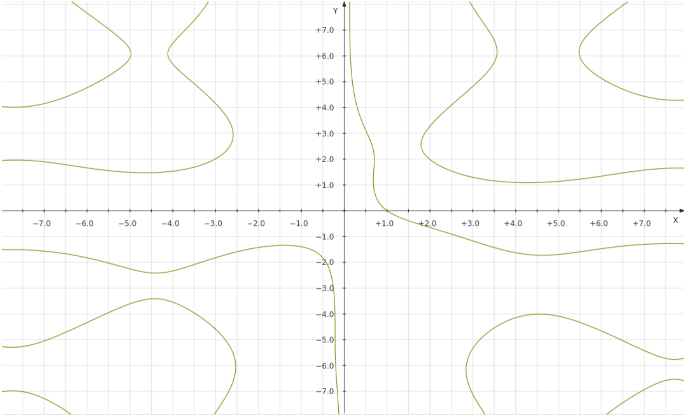
$$x^2 + y^2 = 1$$

Courbes définies implicitement



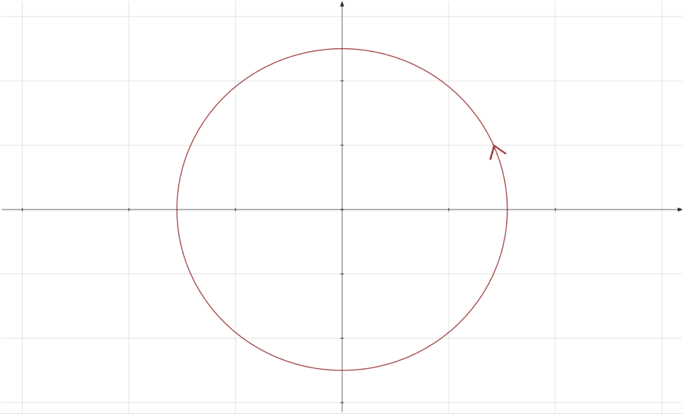
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Courbes définies implicitement



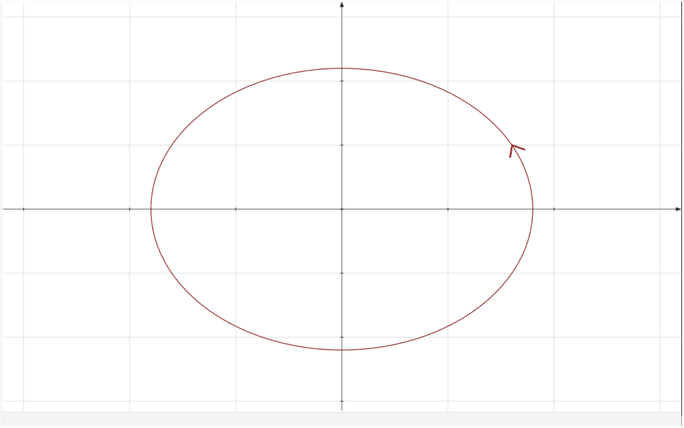
$$y \sin x + x \cos y = 1$$

Courbes paramétrées



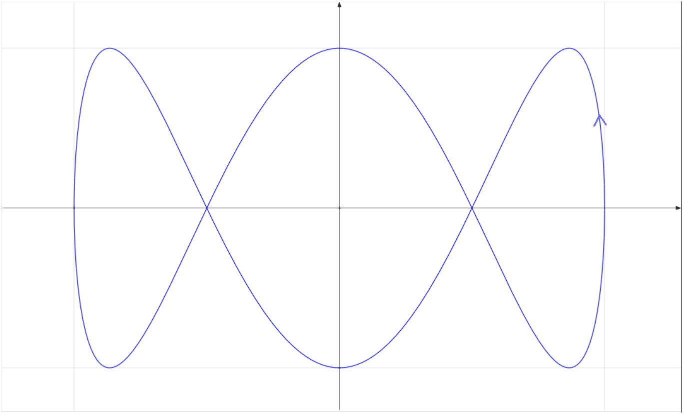
$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$$

Courbes paramétrées



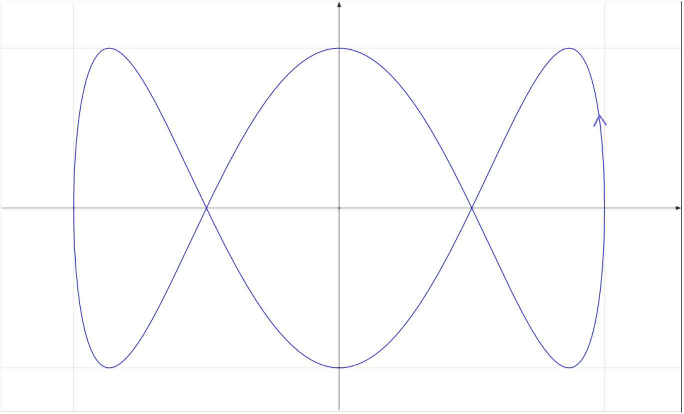
$$x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$$

Courbes paramétrées



$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin 3t$$

Courbes paramétrées



$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin 3t$$

Courbes paramétrées

Définition.– Une COURBE PARAMÉTRÉE est une fonction vectorielle

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{\gamma}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Le SUPPORT de la courbe paramétrée est le lieu des points

$$C^+ = \{\, \overrightarrow{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \;\big|\; t \in I \subset \mathbb{R} \,\},$$

Une courbe paramétrée est naturellement ORIENTÉE par le sens croissant du paramètre t.

On dit que la courbe $\overrightarrow{\gamma}$ est FERMÉE quand $I = [t_0, t_1]$ et $\overrightarrow{\gamma}(t_0) = \overrightarrow{\gamma}(t_1)$.

Courbes paramétrées

• Sauf mention explicite du contraire, on suppose que $\overrightarrow{\gamma}$ est de classe C^∞.

• On appelle VECTEUR VITESSE la dérivée première de $\overrightarrow{\gamma}$:

$$\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t) = \frac{d\overrightarrow{\gamma}(t)}{dt} = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big)$$

• On appelle VECTEUR ACCÉLERATION la dérivée seconde de $\overrightarrow{\gamma}$:

$$\ddot{\overrightarrow{\gamma}}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{\gamma}(t)}{dt^2} = \big(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\big)$$

Courbes paramétrées

Définition.– Une courbe paramétrée $\overrightarrow{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite RÉGULIÈRE si pour tout $t \in I$,

$$\|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\| \neq 0$$

autrement dit, si son vecteur vitesse ne s'annule jamais. La droite passant par $\overrightarrow{\gamma}(t)$ et de vecteur directeur $\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)$ est appelée la DROITE TANGENTE en t à $\overrightarrow{\gamma}$.

Courbes paramétrées

• On appelle ÉLÉMENT DE LIGNE le « vecteur »

$$\boxed{\overrightarrow{d\ell} = \dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\, dt}$$

• On appelle ABSCISSE CURVILIGNE ou PARAMÈTRE DE LA LONGUEUR D'ARC l'intégrale

$$\boxed{s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} \|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\| dt}$$

• On appelle ÉLÉMENT D'ARC la différentielle

$$\boxed{ds = \|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\|\, dt}$$

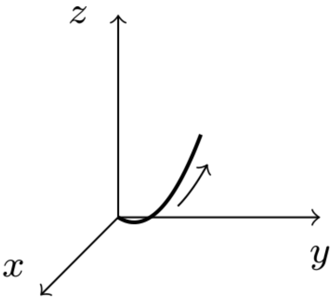
l'intégrale

$$\boxed{L_{t_0}^{t_1}(\overrightarrow{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\|\, dt = \int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds}$$

donne la **longueur** de la courbe paramétrée.

Exemples

Exemple 1. Soit $\overrightarrow{\gamma}(t) = (t, t, t^2)$ avec $t \in [0, 1]$.



Notons que $x(t) = y(t) = t$ et que $z(t) = x^2(t) = y^2(t)$. Le support de la courbe est donc une portion de parabole contenu dans le plan $\{x = y\}$

Exemples

• Puisque $\overrightarrow{\gamma}(t) = (t, t, t^2)$, on a $\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t) = (1, 1, 2t)$ d'où

$$\|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2} \neq 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{\gamma}$ est régulière.

• L'élément de ligne vaut

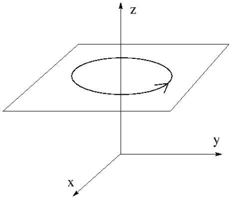
$$\overrightarrow{d\ell} = (1, 1, 2t)\, dt = dt\, \overrightarrow{i} + dt\, \overrightarrow{j} + 2t\, dt\, \overrightarrow{k}$$

• L'élément d'arc vaut

$$ds = \sqrt{2 + 4t^2} dt$$

Exemples

Exemple 2. Soit $\overrightarrow{\gamma}(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.



On a $x(t)/3 = \cos t$, $y(t) = 0$ et $z(t)/2 = \sin t$ ainsi le support de la courbe est l'ellipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

contenue dans le plan $\{y = 0\}$.

Exemples

• Puisque $\overrightarrow{\gamma}(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$, on a

$$\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t) = (-3\sin t, 0, 2\cos t)$$

d'où

$$\|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} \neq 0$$

Ainsi $\overrightarrow{\gamma}$ est régulière.

• L'élément de ligne vaut

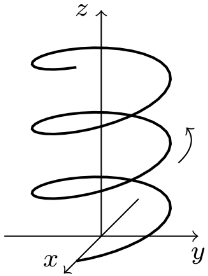
$$\overrightarrow{d\ell} = (-3\sin t, 0, 2\cos t)\ dt = -3\sin t\ dt\ \overrightarrow{i} + 2\cos t\ dt\ \overrightarrow{k}$$

• L'élément d'arc vaut

$$ds = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt$$

Exemples

Exemple 3. Soit $\overrightarrow{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 6\pi]$.



On a $x^2(t) + y^2(t) = 1$, le support de la courbe est contenue dans un cylindre de base un cercle unité. La hauteur $z(t)$ est le paramètre angulaire. Le support de la courbe est donc une hélice.

Exemples

- Puisque $\overrightarrow{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, on a

$$\|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ainsi la courbe $\overrightarrow{\gamma}$ est régulière

- L'élément de ligne vaut

$$\overrightarrow{d\ell} = (-\sin t, \cos t, 1)\; dt = -\sin t\; dt\; \overrightarrow{i} + \cos t\; dt\; \overrightarrow{j} + dt\; \overrightarrow{k}$$

- La longueur entre 0 et 2π vaut

$$L_0^{2\pi}(\overrightarrow{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\; dt = 2\sqrt{2}\pi$$

Circulation d'un champ de vecteurs

Définition.– Soit $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée et $C^+ = \gamma([t_0, t_1])$ son support. On appelle CIRCULATION DE $\overrightarrow{V}$ LE LONG DE C^+ L'INTÉGRALE CURVILIGNE

$$\boxed{\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} := \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{V}(\overrightarrow{\gamma}(t)) \cdot \dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\, dt}$$

où $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{\gamma}(t))$ indique que le champ $\overrightarrow{V}$ est évalué sur les points de la courbe et $\cdot$ désigne le produit scalaire entre vecteurs.

Circulation d'un champ de vecteurs

Proposition.– *Si C^- est parcourue dans le sens opposé à celui de C^+, on a*

$$\int_{C^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}.$$

• Si C^+ est le support d'une courbe fermée, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ s'écrit

$$\boxed{\oint_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}}$$

Exemples

Exemple 1.– Calcul de la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = z\ \overrightarrow{i} - y\ \overrightarrow{j} + x\ \overrightarrow{k}$ le long de l'arc d'élice $\overrightarrow{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ est

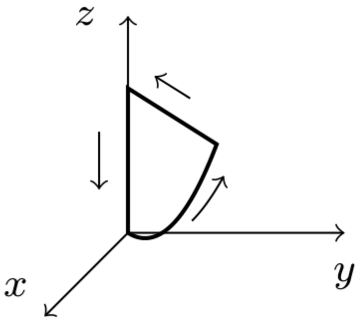
$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{\gamma}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \Big(t\ \frac{d(\cos t)}{dt} - \sin t\ \frac{d(\sin t)}{dt} \\
&\qquad + \cos t\ \frac{dt}{dt} \Big)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-t\ \sin t - \sin t \cos t + \cos t \Big)\ dt \\
&= \Big[t\ \cos t \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t\ dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\ dt \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \cos t\ dt \\
&= 2\pi - \Big[\frac{1}{2} \sin^2 t \Big]_0^{2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

Exemples

Exemple 2.– Calcul de la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z) = z\ \overrightarrow{i} - y\ \overrightarrow{j} + x\ \overrightarrow{k}$ le long de la courbe fermée

$$C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$$

représentée ci-dessous



Exemples

• La circulation du champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$

le long de la parabole $C_1^+ \begin{cases} y = x \\ z = x^2 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$ est :

$$\begin{aligned}
\int_{C_1^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_{\substack{C_1^+ \\ x:0\to 1 \\ z=x^2}} z\,dx - \int_{\substack{C_1^+ \\ y:0\to 1}} y\,dy + \int_{\substack{C_1^+ \\ z:0\to 1 \\ x=\sqrt{z}}} x\,dz \\
&= \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 y\,dy + \int_0^1 \sqrt{z}\,dz \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemples

• La circulation du même champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = z\ \overrightarrow{i} - y\ \overrightarrow{j} + x\ \overrightarrow{k}$ le long du segment

$$C_2^+ \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = 1 \\ x : 1 \to 0 \end{array} \right. \quad \text{est :}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_{\substack{C_2^+ \\ x:1\to 0 \\ z=1}} z\ dx - \int_{\substack{C_2^+ \\ y:1\to 0}} y\ dy + \int_{\substack{C_2^+ \\ z=1 \\ dz=0}} x\ dz \\
&= \int_1^0 dx - \int_1^0 y\ dy + 0 \\
&= -\int_0^1 dx + \int_0^1 y\ dy \\
&= -\Big[\, x \,\Big]_0^1 + \Big[\, \frac{1}{2} y^2 \,\Big]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemples

• Enfin, la circulation de $\overrightarrow{V} = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ le long du segment $C_3^+ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z : 1 \to 0 \end{cases}$ est :

$$\int_{C_3^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \underset{\substack{x=0\\dx=0}}{\int_{C_3^+}} z\,dx - \underset{\substack{y=0\\dy=0}}{\int_{C_3^+}} y\,dy + \underset{\substack{z:1\to 0\\x=0}}{\int_{C_3^+}} x\,dz$$

$$= 0 + 0 + \int_1^0 0\,dz = 0.$$

Exemples

• En conclusion, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermée $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$ vaut :

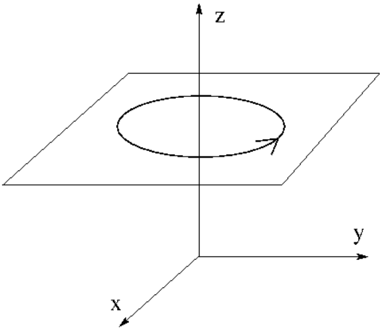
$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{C_1^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_{C_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_{C_3^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0.$$

Exemples

Exemple 3.– Calcul de la circulation du champ

$$\overrightarrow{V}(\rho,\varphi,z) = \varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_\phi} + \rho\,\overrightarrow{k}$$

le long du cercle C^+ d'équation $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=3 \end{cases}$ et orienté comme dans la figure :



Exemples

• Notons que cette courbe se décrit simplement en coordonnées cylindriques : $\begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi : 0 \to 2\pi \\ z = 3 \end{cases}$

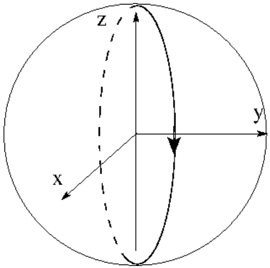
• Puisque $\overrightarrow{V}(\rho, \varphi, z) = \varphi\, \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_\phi} + \rho\, \overrightarrow{k}$, on a :

$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\substack{C^+ \\ \rho=1 \\ d\rho=0}} \varphi\, d\rho + \int_{\substack{C^+ \\ \varphi:0\to 2\pi \\ \rho=2,\ z=3}} z\, \rho\, d\varphi + \int_{\substack{C^+ \\ z=3 \\ dz=0}} \rho\, dz$$

$$= 0 + 6 \int_0^{2\pi} d\varphi + 0 = 12\pi.$$

Exemples

Exemple 4.– Calcul de la circulation du champ $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\,\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\phi} + \rho\,\overrightarrow{e_\theta}$ le long du cercle C^+ d'équation $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ y=x \end{array}\right.$ orienté comme dans la figure



Exemples

• Ce cercle s'écrit de façon relativement simple en coordonnées sphériques comme union de deux demi-cercles d'équations $C_1^+ \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \pi/4 \\ \theta : 0 \to \pi \end{cases}$ et

$$C_2^+ \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = 5\pi/4 \\ \theta : \pi \to 0 \end{cases}$$

• Puisque $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\ \overrightarrow{e_r} + \sin\theta\ \overrightarrow{e_\phi} + \rho\ \overrightarrow{e_\theta}$, on a :

$$\int_{C_1^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\substack{C_1^+ \\ r=2 \\ dr=0}} \varphi\ dr + \int_{\substack{C_1^+ \\ \varphi=\pi/4 \\ d\varphi=0}} r \sin^2\theta\ d\varphi + \int_{\substack{C_1^+ \\ r=2 \\ \theta:0\to\pi}} r^2\ dz$$

$$= 0 + 0 + 4 \int_0^\pi d\theta = 4\pi$$

Exemples

Ainsi que

$$\int_{C_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\substack{C_2^+ \\ r=2 \\ dr=0}} \varphi \, dr + \int_{\substack{C_2^+ \\ \varphi=5\pi/4 \\ d\varphi=0}} r \sin^2\theta \, d\varphi + \int_{\substack{C_2^+ \\ r=2 \\ \theta:\pi\to 0}} r^2 \, dz$$

$$= 0 + 0 + 4 \int_{\pi}^{0} d\theta = -4\pi$$

- Au bilan

$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{C_1^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_{C_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

Circulation d'un champ gradient

Théorème.– *Soit* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}\, \phi$ *un champ de gradient de domaine* D_ϕ*, alors*

• *La circulation de* $\overrightarrow{grad}\, \phi$ *le long d'une courbe* $C^+ \subset D_\phi$ *joignant deux points A et B ne dépend pas de la courbe mais seulement des valeurs de* ϕ *aux deux points*

$$\int_{C^+} \overrightarrow{grad}\, \phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = \phi(B) - \phi(A).$$

• *La circulation de* $\overrightarrow{grad}\, \phi$ *le long d'une courbe fermée* C^+ *est nulle*

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{grad}\, \phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0.$$

Exemple

Exemple.– Soit $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}\,\phi$ où

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{y(z^2-x^2)}}$$

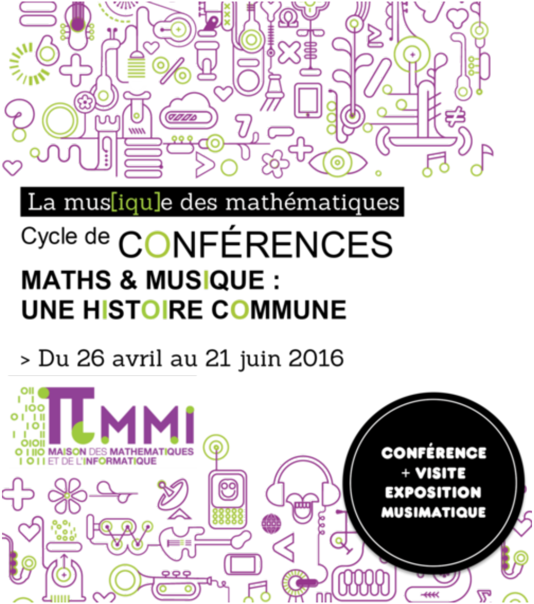
avec

$$D = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y>0,\ z>x>0\,\}$$

Soit C^+ une hélice de D joignant les points $A=(0,1,2)$ et $B=(3,4,5)$. La circulation de $\overrightarrow{grad}\,\phi$ le long de C^+ vaut :

$$\begin{aligned}\int_{C^+}\overrightarrow{grad}\,\phi\cdot\overrightarrow{d\ell} &= \phi(3,4,5)-\phi(0,1,2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{4(25-9)}}-\frac{1}{\sqrt{4-0)}}\\ &= \frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Fin CM 11


La mus[iqu]e des mathématiques
Cycle de CONFÉRENCES
MATHS & MUSIQUE :
UNE HISTOIRE COMMUNE
> Du 26 avril au 21 juin 2016
MMI
MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
CONFÉRENCE + VISITE EXPOSITION MUSIMATIQUE

Fin CM 11

La musique des sphères

→ **Mardi 26 avril** à 20h

Astronomie, musique, géométrie, tout est nombre. Mais quel nombre ? Avec Pythagore, nous partirons à la découverte d'une gamme parfaite. Il sera question de la première révolution mathématique qui amena les Grecs à séparer géométrie et arithmétique.

Les cordes vibrantes

→ **Mardi 10 mai** à 20h

Une corde mise en boîte, une idée folle et musicale mais surtout l'un des épisodes les plus marquants de l'histoire des mathématiques du 18e siècle. Il s'agit de la controverse des cordes vibrantes qui fit débat jusqu'au 20e siècle.

La musique réchauffe

→ **Mardi 24 mai** à 20h

Pourquoi chaleur et musique ont-elles un lien ? Quel lien y a-t-il entre une tige métallique qui refroidit et une guitare ? En 1821, Fourier écrivit la *Théorie analytique de la chaleur*, sans imaginer qu'il créait l'outil le plus fécond pour étudier les vibrations. Retour sur la naissance des séries de Fourier, 70 ans après la controverse des cordes vibrantes.

Les figures de Chladni

→ **Mardi 7 juin** à 20h

Quelle est cette expérience qui intéressa tant Napoléon qu'il invita son inventeur, Chladni, à lui en faire une présentation privée, et fit promettre un prix à celui qui expliquerait ce qu'il se produit ?
(La formation des figures est observable dans l'exposition Musimatique.)

Peut-on entendre la forme d'un tambour ?

→ **Mardi 21 juin** à 20h

Cette question devenue un classique en 50 ans fut le titre d'un article écrit en 1966 par le mathématicien Mark Kac. Le contexte et l'impact de cette curieuse question seront les thèmes principaux.

Fin CM 11


Repas - Partage
Pour fêter la fin du cours
Le jeudi 12 mai à midi

Surfaces paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de « surface ». En voilà trois :

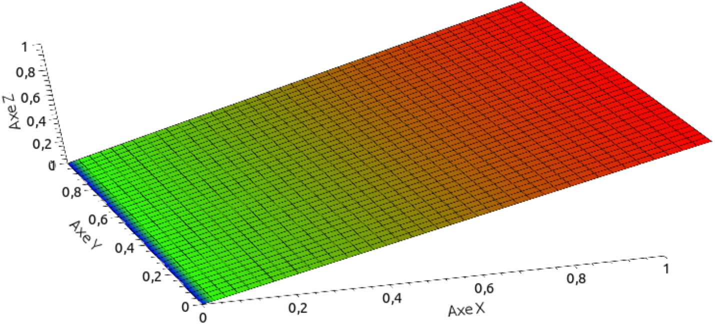
• au moyen des **graphes** de fonctions deux variables

• au moyen d'équations implicites : on parle alors de **surfaces définies implicitement**

• au moyen de deux paramètres, souvent notés u et v : on parle alors de **surfaces paramétrées**

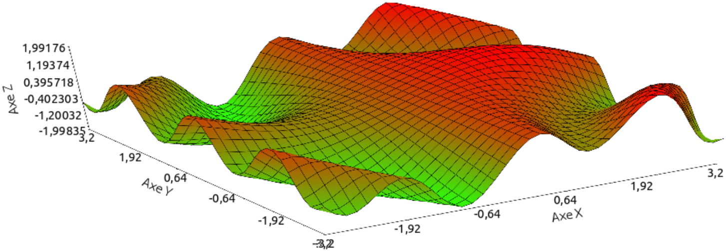
Dans ce chapitre, on donne la préférence aux surfaces paramétrées.

Graphes



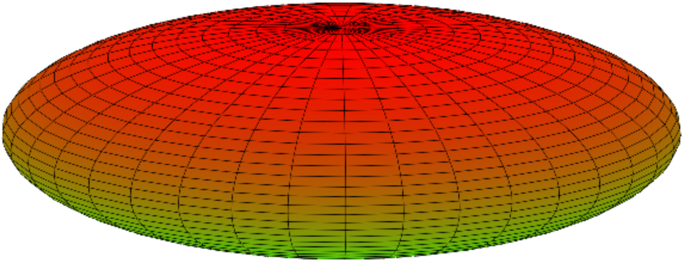
Un plan ; $z = f(x, y) = x$

Graphes



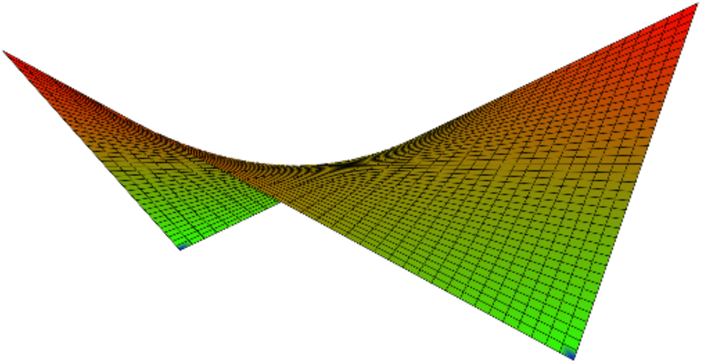
$$z = f(x, y)$$

Surfaces définies implicitement



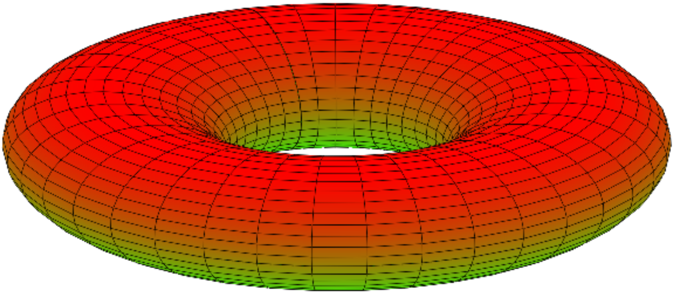
Un ellipsoïde ; $F(x, y, z) = 0$ avec $F(x, y, z) = 2z^2 + x^2 + y^2 - 1$

Surfaces définies implicitement



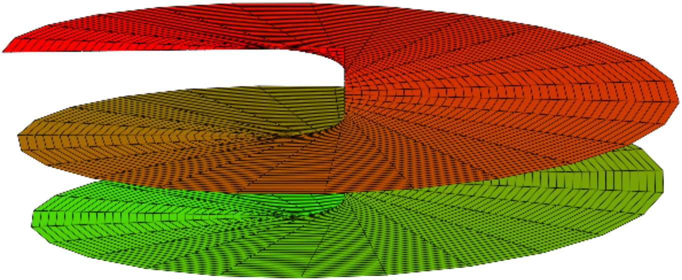
Un paraboloïde hyperbolique ; $F(x, y, z) = 0$ avec
$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

Surfaces paramétrées



Un tore ; $x(u, v) = \cos u\ (2 + \cos v)$, $y(u, v) = \sin u\ (2 + \cos v)$, $z(u, v) = \sin v$

Surfaces paramétrées



Un hélicoïde ; $x(u,v) = u\cos v$, $y(u,v) = u\sin v$, $z(u,v) = u$

Surfaces paramétrées

Définition.– Une SURFACE PARAMÉTRÉE est une fonction vectorielle

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

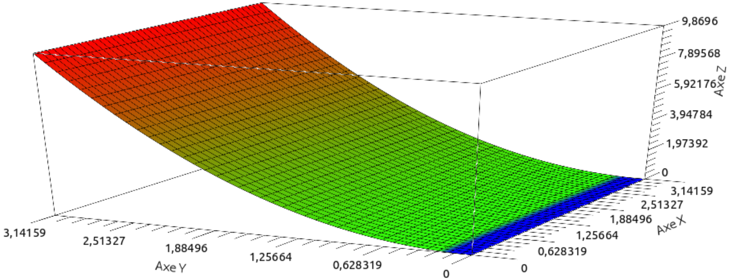
Le SUPPORT de la surface paramétrée est le lieu des points

$$S = \{\, f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \,\big|\, (u,v) \in U \times V \subset \mathbb{R}^2 \,\}$$

Exemple

Exemple 1.– Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$



Le support S est un cylindre d'axe (Oy) et de base une portion de parabole.

Surfaces paramétrées régulières

Définition.– On dit qu'une surface paramétrée

$$\begin{array}{rccl} f: & U \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{array}$$

est RÉGULIÈRE en un point $(u, v) \in U \times V$ si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

sont linéairement indépendantes. Le plan passant par $f(u, v)$ et de base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$ est dit PLAN TANGENT en (u, v) à la surface paramétrée.

Vecteur normal

Propriété.– *Un point $(u, v) \in U \times V$ est régulier si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$$

Propriété.– *Soit f une surface paramétrée régulière. Le vecteur*

$$\overrightarrow{n}(u, v) := \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

est un vecteur non nul normal au plan tangent en (u, v) de la surface paramétrée f.

Vecteur normal

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

On a $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (0,1,2v)$ ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la surface est régulière en tout point de $[0,1]\times[0,1]$ et un vecteur non nul normal à la surface est donné par

$$\overrightarrow{n}(u,v) = (2v, 0, -1)$$

Orientation

Définition.– Soit f une surface paramétrée régulière, le choix d'un champ de vecteurs normaux unitaires

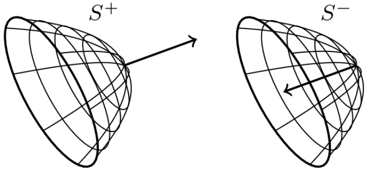
$$\overrightarrow{n} : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

s'appelle une ORIENTATION de f.

• Il n'y a que deux choix possibles

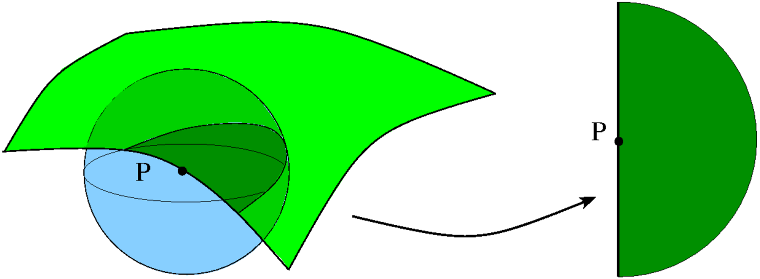
$$\overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right|} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{n} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right|}$$

• Un choix ayant été effectué, on note S^+ la surface orientée par ce choix et S^- par le choix opposé.



Bord d'un support

- On suppose que f est régulière sur $U \times V$ et injective sur l'intérieur de $U \times V$.

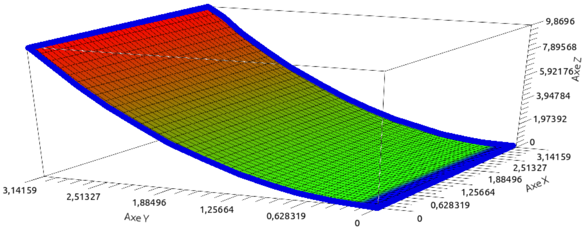


Définition.– Un point $P \in S$ est dit POINT DU BORD si pour toute boule ouverte suffisamment petite $B \subset \mathbb{R}^3$ centrée en P, l'intersection $S \cap B$ « ressemble » au demi-disque fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$. L'ensemble des points du bord de S est noté ∂S.

Bord d'un support

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

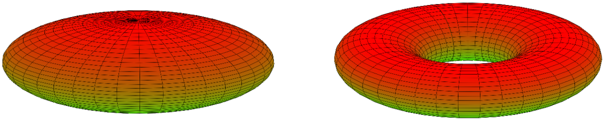


La surface S n'est pas fermée. Son bord est l'union de quatre courbes :

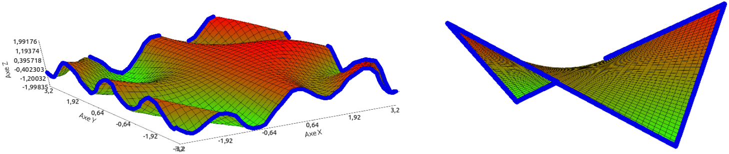
$$\partial S = \left\{ \begin{array}{l} z = x^2 \\ y = 0 \\ x \in [0,1] \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 1 \\ y \in [0,1] \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} z = x^2 \\ y = 1 \\ x \in [0,1] \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y \in [0,1] \end{array} \right.$$

Surfaces fermées

Définition.– Une surface paramétrée régulière sur $U \times V$ et injective sur l'intérieur de $U \times V$ est dite FERMÉE si $\partial S = \emptyset$.



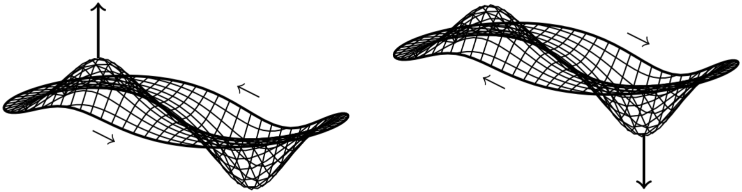
Surfaces fermées



Surfaces à bord non vide

Orientation du bord

Remarque.– Un orientation de la surface induit une orientation de son bord : un promeneur parcourt le bord ∂S dans le sens positif si la surface S se trouve dans la direction de son bras gauche tandis que la pointe du vecteur normal est à la hauteur de sa tête.

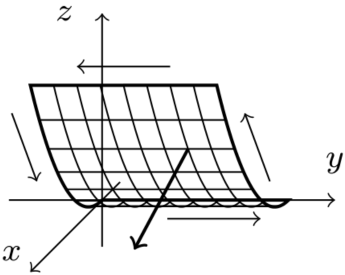


L'orientation de ∂S selon celle de S

Orientation du bord

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$



L'orientation de S induit l'orientation du bord ∂S décrite dans la figure ci-dessus.

Aire d'une surface paramétrée

Définition.– Soit $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. On appelle

- L'ÉLÉMENT DE SURFACE, le « vecteur »

$$\boxed{\overrightarrow{dS} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right) \; du\, dv}$$

- L'ÉLÉMENT D'AIRE, l'intégrande

$$\boxed{dA = \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\| dudv}$$

- L'AIRE DE LA SURFACE, le réel

$$\boxed{Aire(f) = \iint_{[u_0,u_1]\times[v_0,v_1]} dA}$$

Aire d'une surface paramétrée

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\overrightarrow{dS}=\begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dudv$$

et

$$dA=\sqrt{1+4v^2}dudv$$

Aire d'une surface paramétrée

Ainsi

$$
\begin{aligned}
Aire(f) &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \sqrt{1+4v^2}\,dudv \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+4v^2}\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^2 \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

Flux à travers une surface paramétrée

• Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et S^+ une surface orientée contenue dans le domaine de $\overrightarrow{V}$, paramétrée par $(u, v) \mapsto f(u, v)$, avec $u \in [u_0, u_1]$ et $v \in [v_0, v_1]$ et orientée par

$$\overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right|}$$

Définition.– On appelle FLUX DE $\overrightarrow{V}$ À TRAVERS S^+ l'INTÉGRALE DE SURFACE

$$\boxed{\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

c'est-à-dire le réel

$$\iint_{[u_0,u_1]\times[v_0,v_1]} \overrightarrow{V}\Big(f(u, v)\Big) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right) \, du \, dv$$

Flux à travers une surface paramétrée

Notation.– Si S^+ est une surface fermée, le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S^+ s'écrit

$$\boxed{\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Proposition. – *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et S^+ une surface orientée contenue dans le domaine de $\overrightarrow{V}$. Si S^- est la même surface orientée dans le sens opposé à celui de S^+, on a*

$$\iint_{S^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}.$$

Exemples

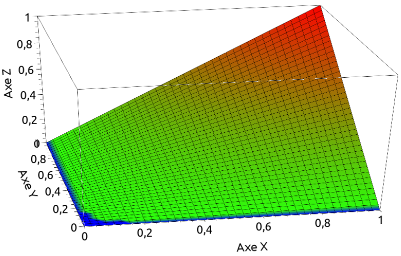
Exemple.– Calcul du flux de

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = x\ \overrightarrow{i} + z\ \overrightarrow{j} + y\ \overrightarrow{k}$$

au travers de

$$S^{+} \begin{cases} z = xy \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

paramétrée par $f(u, v) = (u, v, uv)$ avec $u \in [0, 1]$ $v \in [0, 1]$ et orientée avec $\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-v, -u, 1)$.



Exemples

• On a

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \begin{pmatrix} u \\ uv \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \, du\, dv$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \Big(-uv - u^2 v + v \Big) \, du\, dv$$

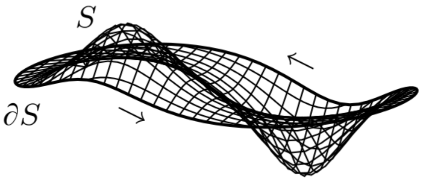
• Ainsi

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_0^1 u\, du \int_0^1 v\, dv - \int_0^1 u^2\, du \int_0^1 v\, dv + \int_0^1 du \int_0^1 v\, dv$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

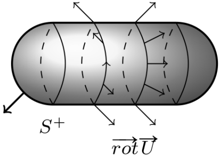
Théorèmes de Stokes-Ampère et de Gauss-Ostrogradski



Théorème de Stokes-Ampère.– *Soit $\overrightarrow{V} = rot\,\overrightarrow{U}$ un champ rotationnel alors :*

$$\boxed{\iint_{S^+} rot\,\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_{\partial S^+}\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{d\ell}}\,.$$

Théorèmes de Stokes-Ampère et de Gauss-Ostrogradski



Corollaire 1.– *Si S^+ est fermée alors*

$$\boxed{\oiint_{S^+} rot\,\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{dS} = 0}$$

Corollaire 2.– *Si $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{grad}\,\phi$ est un champ gradient alors*

$$\boxed{\oint_{\partial S^+} \overrightarrow{grad}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = \iint_{S^+} rot(\overrightarrow{grad}\,\phi) \cdot \overrightarrow{dS} = 0}$$

(car $rot(\overrightarrow{grad}\,\phi) = 0$).

Exemple

Exemple.– Calcul du flux du champ

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\,\overrightarrow{i} - yz\,\overrightarrow{j}$$

au travers du cylindre

$$S^+ = \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z \in [0, H] \end{cases}$$

• Le champ $\overrightarrow{V}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ (contractile) et

$$div\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = z - z = 0$$

par conséquent $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel vectoriel.

• Un calcul montre que $\overrightarrow{U}(x,y,z) = xyz\,\overrightarrow{k}$ est un potentiel vectoriel de $\overrightarrow{V}$ i.e. $rot\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$.

Exemple

- D'après le théorème de Stokes

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S^+} rot\,\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{\partial S^+} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \oint_{\partial S^+} xyz\ dz$$

- Le bord de S est composé de deux cercles

$$C_0 = \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad C_H = \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$$

le long desquels z est constant donc

$$\oint_{\partial S^+} xyz\ dz = 0$$

et par conséquent

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Théorème de Green-Riemann

• Si $S \subset (Oxy)$ est une surface plane $\overrightarrow{V} = rot\overrightarrow{U}$ un champ rotationnel avec

$$\overrightarrow{U}(x,y) = P(x,y)\ \overrightarrow{i} + Q(x,y)\ \overrightarrow{j}$$

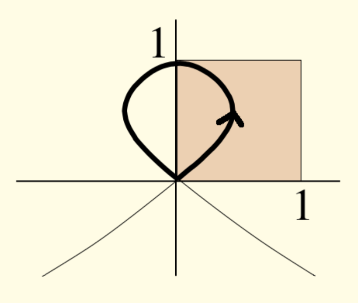
alors $\overrightarrow{V}$ est orthogonal à S et on a

$$\overrightarrow{V} = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\ \overrightarrow{k}$$

Théorème de Green-Riemann.– On a alors

$$\boxed{\iint_{S^+} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = \oint_{\partial S^+} \Big(P\, dx + Q\, dy\Big)}$$

Exemple



Exemple.– Calcul de l'aire enclose par la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t),y(t)) = (t^3-t, 1-t^2) \end{array}$$

Exemple

• Si on choisit $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = x$ dans la formule de Grenn-Riemann on constate que

$$\iint_{S^+} 1 \, dx \, dy = \oint_{\partial S^+} xdy$$

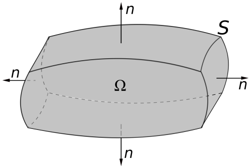
• Or $Aire(S) = \iint_{S^+} \, dx \, dy$ donc

$$Aire(S) = \int_{-1}^{1} x(t)y'(t)dt$$

• On a $x(t)y'(t) = (t^3 - t)(1 - t^2) = 2t^2 - 2t^4$ et

$$Aire(S) = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

Théorème de Gauss-Ostrogradski



Théorème de Gauss-Ostrogradski.– *Soient $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs, S une surface fermée, Ω l'espace borné délimitée par S (en particulier $\partial\Omega = S$) alors :*

$$\boxed{\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega} div\,\overrightarrow{V}\ dx\ dy\ dz}\ .$$

Dans cette égalité, l'orientation choisie pour S^+ est celle de la normale sortante.

Exemple

Exemple.– Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs à divergence constante $div\ \overrightarrow{V} = a$ et S une surface fermée englobant un volume $\mathcal{V}$. Alors le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers de S^+ vaut

$$\begin{aligned}
\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} &= \iiint_\Omega div\,\overrightarrow{V}\ dx\ dy\ dz \\
&= a \iiint_\Omega dx\ dy\ dz \\
&= a Vol(\Omega) \\
&= a\mathcal{V}
\end{aligned}$$

Exercice

Énoncé.– Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\,\overrightarrow{i} + y^2\,\overrightarrow{j} + z^2\,\overrightarrow{k}$ à travers de la surface fermée constituée du cône tronqué

$$S_1^+ = \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \in [0,3] \end{cases}$$

et du disque

$$S_2^+ = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

et orientée par les vecteurs normaux sortants.

Réponse.– Soit

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3\right\}$$

on a $\partial\Omega = S$

Exercice

• Puisque S est fermée, on peut appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky

$$\oint\!\!\!\oint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega} div \overrightarrow{V}\ dx\ dy\ dz$$

avec ici $div\ \overrightarrow{V} = 2(x+y+z)$.

• Pour déterminer l'intégrale triple, on passe en coordonnées cylindriques. On a

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

et

$$\begin{aligned} dx\ dy\ dz &= |det\ J_h(\rho,\varphi,z)| d\rho d\varphi dz \\ &= \rho\ d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

Exercice

• Ainsi

$$\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 2\int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \Big(\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + \rho z\Big) d\rho$$

$$= 2\int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{3}\rho^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}\rho^2 z\Big]_{\rho=0}^{\rho=z} d\varphi$$

$$= 2\int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{3}z^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}z^3\Big) d\varphi$$

$$= 2\int_0^3 dz \Big[\frac{1}{3}z^3(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{2}z^3\varphi\Big]_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\int_0^3 \frac{1}{2}z^3\, 2\pi\, dz$$

$$= 2\pi\frac{1}{4}3^4 = \frac{81\pi}{2}$$

Fin CM 12 et du cours : Bravo pour votre ténacité !

« Permettez-moi de vous révéler le secret qui m'a conduit à atteindre mon but. Ma force repose uniquement sur ma ténacité »
Louis Pasteur