Leçon II : Fibrés

1 Le théorème du voisinage tubulaire

Soit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, *l'espace tangent* à M est l'ensemble :

$$TM = \{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_xM\}.$$

On a une projection naturelle $p : TM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ dont la fibre $p^{-1}(x) = T_xM \simeq \mathbb{R}^m$ est l'espace tangent à M au point x. L'espace tangent TM est muni de la topologie induite par $M \times \mathbb{R}^n$, c'est en fait une variété C^∞ de dimension $2m$. Si $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ sont des cartes de M, alors les applications

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i : & p^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & V_i \times \mathbb{R}^m \\ & (x,v) & \longmapsto & (\varphi_i(x), w) \end{array}$$

où w est l'unique vecteur tel que $d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(w) = v$ et $V_i = \varphi_i(\mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}^m$, sont des cartes de TM. En particulier :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i^{-1} : & V_i \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & p^{-1}(\mathcal{U}_i) \\ & (y,w) & \longmapsto & (\varphi_i^{-1}(y), d(\varphi_i^{-1})_y(w)) \end{array}$$

et les changements de cartes sont donnés par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : & V_i' \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & V_j' \times \mathbb{R}^m \\ & (y,w) & \longmapsto & (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y), d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_y(w)) \end{array}$$

où $V_i' = \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ et $V_j' = \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. Il est souvent commode de considérer des *cartes au dessus des* $\mathcal{U}_i$, à savoir :

$$\begin{array}{rccc} T\varphi_i : & p^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m \\ & (x,v) & \longmapsto & (x,w). \end{array}$$

Les changements de cartes :

$$\begin{array}{rccc} T\varphi_j \circ (T\varphi_i)^{-1} : & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m \\ & (x,w) & \longmapsto & (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(w)). \end{array}$$

peuvent alors être vus comme des applications :

$$\begin{array}{rccc} t_{ij} : & \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j & \longrightarrow & Gl(m,\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}, \end{array}$$

on les appelle alors des *fonctions de transitions.*

On munit $\mathbb{R}^m$ de la métrique euclidienne, l'*espace normal* à M est l'ensemble :

$$NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in N_x M = (T_x M)^\perp\}.$$

Avec la topologie induite par $M \times \mathbb{R}^n$, cette espace apparaît comme une sous-variété de dimension n de $M \times \mathbb{R}^n$. Comme précédemment, on a une projection naturelle $p : NM \to M$, $(x, v) \mapsto x$ avec pour fibre $p^{-1}(x) = N_x M \simeq \mathbb{R}^{n-m}$.

Soit $r > 0$, l'ensemble :

$$Tub(r) = \{(x, v) \in N_x M \mid |v| < r\}$$

est une sous-variété de NM appelée le *tube de rayon* r. L'application exponentielle de $\mathbb{R}^n$ donne par restriction une application

$$\begin{array}{rccc} e: & NM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x, v) & \longmapsto & x + v. \end{array}$$

Théorème du voisinage tubulaire (cas $N = \mathbb{R}^n$). − *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété compacte. Si $r > 0$ est suffisamment petit alors $e_{|Tub(r)}$ est un difféomorphisme sur son image $\mathcal{V} = e(Tub(r))$, par conséquent $\mathcal{V}$ est un voisinage de M dans $\mathbb{R}^n$ dit voisinage tubulaire.*

Démonstration. − Notons que e envoie la section nulle $\mathcal{O}(NM) = \{(x, 0) \in NM\}$ sur M. On va d'abord montrer que sur un voisinage de $\mathcal{O}(NM)$, e est une immersion, bien sûr on pourra toujours choisir un voisinage qui soit un tube. Puisque $e : NM \to \mathbb{R}^n$, on a $de_{(x,0)} : T_{(x,0)} NM \to \mathbb{R}^n$ avec

$$T_{(x,0)} NM = T_x M \oplus N_x M.$$

Ainsi, pour tout $(X, V) \in T_{(x,0)} NM$, on a :

$$de_{(x,0)}(X, V) = dx_x(X) + dv_0(V) = X + V.$$

D'autre part, $\mathbb{R}^n \simeq T_x M \oplus N_x M$, donc $de_{(x,0)}$ est bijective, ceci reste vrai sur un tube $Tub(r)$ avec r suffisamment petit. Quitte à prendre r plus petit encore, $e_{|Tub(r)}$ est injective. En effet, soient $(x_n, v_n) \neq (x'_n, v'_n) \in Tub(\frac{1}{n})$ et tels que $x_n + v_n = x'_n + v'_n$. Par compacité, on peut toujours supposer $x_n \to x$. Puisque $v_n \to 0$ et $v'_n \to 0$, on a aussi $x'_n \to x$. Par le théorème de la fonction réciproque, e est un difféomorphisme d'un voisinage V de $(x, 0)$ sur $e(V)$. Contradiction. $\square$

2 Un peu de théorie des fibrés

Soient G un groupe topologique, X un espace topologique et $\Phi : G \to$ Homéo(X) un morphisme de groupes. Si

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & \Phi(g)(x) \end{array}$$

est continue, on dit que G *agit* sur X, et si Φ est injective, on dit que l'action est *effective.*

Définition. – Soit G un groupe topologique agissant effectivement sur un espace F. *Un fibré E de base B de fibre F et de groupe structural G* est une application $p : E \to B$ et une collection d'homéomorphismes $\{\varphi_i : p^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_i \times F,\ \mathcal{U}_i$ ouvert de $B\}$ (les cartes au dessus de $\mathcal{U}_i$) tels que :

1) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{U}_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \mathcal{U}_i & \end{tikzcd}$$

2) Tout point de B figure dans une carte.
3) Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et φ est une carte, alors $\varphi_{|\mathcal{V}}$ est une carte de $\mathcal{V}$.
4) Les applications de changement de cartes sont de la forme :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times F & \longrightarrow & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times F \\ (x,f) & \longmapsto & (x, t_{ij}(x).f) \end{array}$$

où $t_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to G$ (application de transition).

Quand la fibre est un espace vectoriel F de dimension q, on parle de *fibré vectoriel de rang q*, quand la fibre est G on parle de *fibré principal.*

Exemples. – 1) L'espace produit $M_1 \times M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1$, la fibre est M_2, le groupe structural est $G = \{id\}$.
2) Le ruban de Möbius $\mathbb{M}^2 \to \mathbb{S}^1$, la fibre est un segment $]-\epsilon, \epsilon[$, le groupe structural est $G = \{\pm id\} = \mathbb{Z}_2$.
3) La fibration de Hopf $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2^{-1}$, la fibre est $\mathbb{S}^1$, le groupe structural est $G = U(1)$.
4) Le fibré tangent (d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$) $TM \xrightarrow{p} M$, la fibre est $\mathbb{R}^m$, le groupe structural est $G = Gl(m, \mathbb{R})$.
5) Le fibré normal (d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$) $NM \xrightarrow{p} M$, la fibre est $\mathbb{R}^{n-m}$, le groupe structural est $G = Gl(n-m, \mathbb{R})$.
6) Le fibré des repères. Soit $FM = \{(x, v_1, \cdots, v_m) \in M \times T_xM \times \cdots \times$

$T_xM \mid rg(v_1, \cdots, v_m) = m\}$, la projection naturelle $FM \xrightarrow{p} M$ est un fibré de fibre $Gl(m, \mathbb{R})$ et de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R})$.
7) Un revêtement $\tilde{M} \to M$ avec M et $\tilde{M}$ connexe par arcs, la fibre est un espace discret et G s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(M)$.
8) Fibré des 1-jets $J^1(M, N) \to M \times N$, de fibre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R})$ (l'action est $(a, b).L = b^{-1} \circ L \circ a)$).

Fibré induit. – Soit $f : B' \to B$ et $p : E \to B$ un fibré de fibre F et de groupe structural G. On définit le *fibré induit* f^*E par :

$$f^*(E) = \{(b', e) \in B' \times E \mid p(e) = f(b')\} \xrightarrow{p'} B'.$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

et il est facile de vérifier que f^*E a pour fibre F est pour groupe structural G.

Isomorphisme de fibrés. – Un morphisme de fibrés est une paire d'applications $(\tilde{f}, f)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$

et telle que pour tout couple de cartes $\varphi : p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$, $\varphi' : p^{-1}(\mathcal{U}') \to \mathcal{U}' \times F$ la composée :

$$\{b\} \times F \xrightarrow{\varphi^{-1}} p^{-1}(b) \xrightarrow{\tilde{f}} (p')^{-1}(f(b)) \xrightarrow{\varphi'} \{f(b)\} \times F$$

soit un homéomorphisme donnée par l'action d'un élément $\Psi_{\varphi,\varphi'}(b) \in G$. De plus $b \mapsto \Psi_{\varphi,\varphi'}(b)$ doit être continue sur $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{U}')$. Un morphisme $(\tilde{f}, f)$ est un isomorphisme si il admet un inverse $(\tilde{g}, g)$.

Théorème. – *Soient M une variété compacte (éventuellement à bord) et $E \to B$ un G-fibré. Si $f, g : M \to B$ sont homotopes alors f^*E et g^*E sont isomorphes.*

Définition. – Un espace B est *contractile* si l'identité de B est homotope à une application constante.

Les boules de $\mathbb{R}^n$ sont contractiles, plus généralement les parties convexes.

Théorème. − *Tout fibré sur une base contractile est trivial (isomorphe à un produit).*

Ce résultat est un corollaire du théorème précédent.

Cas des fibrés vectoriels. − Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels, on peut former $E_1 \oplus E_2$, $E_1 \otimes E_2$, E_2/E_1 (si $E_1 \subset E_2$), $\mathcal{L}(E_1, E_2) = E_1^* \otimes E_2$, etc. Toutes ces opérations se généralisent facilement au cas de fibrés $E_1 \to B$ et $E_2 \to B$ sur une même base.

3 Le fibré tangent

Nous avons donné une définition du fibré tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Cette définition est fort peu intrinsèque mais elle peut suffire dans le cadre de ce cours à condition de savoir :

1) que toute variété M se plonge dans un espace $\mathbb{R}^n$ avec n assez grand,

2) que deux plongements $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^n$ définissent des fibrés tangents isomorphes.

Voici cependant une définition intrinsèque. Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété avec $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$. Un vecteur est une classe d'équivalence $[x, i, v]$ de triplets $(x, i, v) \in M \times I \times \mathbb{R}^m$ sous la relation d'équivalence :

$$(x, i, v) \sim (y, j, w) \iff x = y \text{ et } d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v) = w.$$

L'ensemble de tous les vecteurs de M est l'espace tangent TM. Il est muni d'une projection :

$$\begin{array}{rccc} p: & TM & \longrightarrow & M \\ & [x, i, v] & \longmapsto & x. \end{array}$$

Des cartes sont données par :

$$\begin{array}{rcccc} T\varphi_i: & p^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & \varphi_i(\mathcal{U}_i) \times \mathbb{R}^m \simeq \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m & \\ & [x, i, v] & \longmapsto & (\varphi_i(x), v) \qquad (x, d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v)). & \end{array}$$

d'où les changements de cartes :

$$\begin{array}{rccc} T\varphi_j \circ (T\varphi_i)^{-1}: & \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m \\ & (x, v) & \longmapsto & (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_x(v)) \end{array}$$

qui sont des difféomorphismes. On munit TM de la topologie pour laquelle chaque $T\varphi_i$ est un homéomorphisme. On vérifie alors que $p : TM \to M$ est un fibré vectoriel de fibre $\mathbb{R}^m$ et de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R})$.

Pour toute application $f : M \xrightarrow{C^1} N$, on a une application $df : TM \to TN$ définie au moyen de représentations locales :

$$\begin{array}{rccc} (df)_{ij} : & p_M^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & p_N^{-1}(\mathcal{V}_i) \\ & [x,i,v] & \longmapsto & [f(x), j, d(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v)] \end{array}$$

si $\mathcal{A}_M = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ et $\mathcal{A}_N = \{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}$. Par construction df est un morphisme de fibrés vectoriels i. e. linéaire entre les fibres. En réalité cette construction est fonctorielle, en particulier :

$$d(f \circ g) = df \circ dg \text{ et } d(id_M) = id_{TM}.$$

Orientation. – Le groupe $Gl_+(m, \mathbb{R})$ agit de manière évidente sur les bases $\{(e_1, \cdots, e_m)\}$ de $\mathbb{R}^m$. Il y a deux orbites, une *orientation de* $\mathbb{R}^m$ est le choix de l'une d'entre elles, notée ω_0. Soit $p : E \to B$ un fibré vectoriel de rang m, une *orientation de* E est une famille $\{\omega_x\}_{x \in B}$ d'orientations des fibres $\{E_x\}_{x \in B}$ telle qu'il existe un atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ de E dans lequel les restrictions sur les fibres $\varphi_x : (E_x, \omega_x) \to (\mathbb{R}^m, \omega_0)$ des cartes (au dessus des $\mathcal{U}_\rangle$) $\varphi_i : p^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_\rangle \times \mathbb{R}^m$ préservent toujours les orientations. Une *orientation de* M est une orientation de $p : TM \to M$. Notons que si ω est une orientation de $E \to B$ et $f : B' \to B$ alors f^*E est naturellement orientée, on note $f^*\omega$ cette orientation.

Proposition. – *Toute variété simplement connexe est orientable.*

Démonstration. – L'idée est la suivante, on prend $x \in M$ et une orientation ω_x de T_xM, pour définir l'orientation ω_y de $y \in M$, on "pousse" ω_x le long d'un chemin joignant x à y. Afin que la construction ait un sens, il faut que ω_y ne dépende pas du chemin choisi, c'est là que l'hypothèse de simple connexité intervient. Plus précisément, soit $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, puisque la base est contractible, γ^*TM est trivial et donc orientable. Il existe une unique orientation θ^{γ^*TM} de γ^*TM telle que au dessus de $0 \in [0,1]$, $\theta_0^{\gamma^*TM} = (\lambda^*\omega_x)_0$. On définit ω_y comme étant l'orientation de T_yM telle que au dessus de $1 \in [0,1]$, $(\lambda^*\omega_y)_1 = \theta_1^{\gamma^*TM}$. On note $\omega_y = \lambda_\sharp \omega_x$. Il faut maintenant montrer que si $\delta : [0,1] \to M$ est un autre chemin tel que $\delta(0) = x$ et $\delta(1) = y$, alors $\lambda_\sharp \omega_x = \delta_\sharp \omega_x$. Puisque M est simplement connexe, il existe une homotopie $h : [0,1]^2 \to M$ telle que :

$$h(0,s) = x, \;\; h(1,s) = y, \;\; h(t,0) = \gamma(t), \;\; h(t,1) = \delta(t).$$

Il est plus pratique de voir cette homotopie comme une application $h : D^2 = [0,1]^2/\sim \to M$ où les seules classes non triviales de la relation $\sim$ sont $\{(0,s) \mid s \in [0,1]\}$ et $\{(1,s) \mid s \in [0,1]\}$. Comme D^2 est contractible, h^*TM est trivial donc orientable, il existe une unique orientation θ telle que :

$$\theta_{[(t,0)]} = \theta_t^{\gamma^*TM}, \quad \theta_{[(t,1)]} = \theta_t^{\delta^*TM}.$$

On a : $(\lambda^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = \theta_1^{\gamma^*TM} = \theta_{[(1,s)]}$ et $(\delta^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = \theta_1^{\delta^*TM} = \theta_{[(1,s)]}$ donc $(\lambda^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = (\delta^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]}$ mais :

$$(\lambda^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = (f^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} \text{ et } (\delta^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = (f^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]}$$

d'où $\lambda_\sharp\omega_x = \delta_\sharp\omega_x$. Ainsi ω_y ne dépend pas du chemin choisi. On construit par ce procédé une orientation sur chaque composante connexe de M. □

Proposition. – *$\mathbb{R}P^{2n}$ n'est pas orientable.*

Démonstration. – Supposons que ω soit une orientation de $\mathbb{R}P^{2n}$. On note $A : \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ l'antipodie et $p : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ la projection. On peut définir une orientation θ de $\mathbb{S}^{2n}$ par la relation $dp_x(\theta_x) = \omega_{[x]}$. D'autre part $p \circ A = p$ implique :

$$dp_{-x}(A\theta_x) = dp_x(\theta_x), \quad (*).$$

Or $A\theta_x$ est l'une des orientations possibles i. e. $A\theta_x = \pm\theta_x$. Puisque $dp_{-x}(\theta_{-x}) = \omega_{[x]}$, il faut d'après $(*)$ que $A\theta_x = \theta_{-x}$; donc θ est invariante par l'antipodie. Ceci est impossible sur $\mathbb{S}^{2n}$ car :

$$A(x, e_1, \cdots, e_{2n}) = (-x, -e_1, \cdots, -e_{2n})$$

autrement dit, puisque $(-1)^{2n+1} = -1$, A renverse l'orientation. □

Parallélisabilité. – L'orientabilité signifie que l'on peut suivre de manière cohérente un repère direct de M le long d'un lacet. Si on peut définir de manière cohérente un champ de repères directs sur tout M on dit que TM (ou M) est parallélisable. Plus précisément M est dite *parallélisable* si son fibré des repères FM admet une section (et dans ce cas FM est trivial, puisque FM est un fibré principal) ou de manière équivalente, si TM est trivialisable (isomorphe à $M \times \mathbb{R}^m$).

Exemples. – $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$, tous les groupes de Lie.

On note $\epsilon : M \times \mathbb{R} \to M$ le fibré vectoriel trivial de rang 1. On dit que M est *stablement parallélisable* si $TM \oplus \epsilon$ est trivial.

Exemples. – $\mathbb{S}^n$, Σ_g.

On dit que M est *presque parallélisable* si $M \setminus \{\text{point}\}$ est parallélisable. On note P_m (resp. SP_m, resp. PP_m) l'ensemble des variétés parallélisables de dimension m (resp. stablement parallélisables, resp. presque parallélisables).

Proposition. – *On a : $P_m \subset SP_m \subset PP_m \subset$ Orientable*
De plus :

$SP_2 = PP_2 =$ { *toutes les variétés orientables de dimension 2* }.
$P_3 = SP_3 = PP_3 =$ { *toutes les variétés orientables de dimension 3* }.
$SP_4 \neq PP_4$.[1]

La preuve de cette proposition fait appel à des résultats de classification des fibrés. On l'admet.

4 Le fibré normal

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition intrinsèque du fibré normal d'une immersion. Notons d'abord que si $f : M \to N$ est une immersion alors

$$df(TM) = \{(x, df_x(v_x)) \in M \times TN \mid x \in M,\ v_x \in T_xM\} \subset f^*TN$$

est un sous-fibré vectoriel de rang m de f^*TN qui est isomorphe (via df) à TM.

Définition. − Soit $f : M \to N$ une immersion, le fibré

$$N(f) = (f^*TN)/df(TM)$$

est appelé le *fibré normal de* f.

On note $Tub(r) = \{(x, v) \in N_x(f) \mid |v| < r\}$ (on a muni N d'une métrique riemannienne arbitraire).

Théorème du voisinage tubulaire (cas général). − *Soit* $f : M \to N$ *un plongement de* M *compacte. Si* $r > 0$ *est suffisamment petit alors* $\exp_{|Tub(r)}$ *est un difféomorphisme sur son image* $\mathcal{V}$, *par conséquent* $\mathcal{V}$ *est un voisinage de* M *dans* N *dit voisinage tubulaire.*

On a noté *exp* l'application exponentielle $TN \to N$. La preuve de ce théorème est une adaptation facile de celle donnée en début de leçon pour le cas $N = \mathbb{R}^n$.

Une observation élémentaire mais importante est la suivante :

$$df(TM) \oplus N(f) \simeq f^*TN.$$

En effet, si on munit N d'une métrique riemannienne arbitraire, alors f^*TN se retrouve munit d'un produit scalaire dans chaque fibre par simple transport de structure. On note ν le fibré orthogonal à $df(TM)$ dans f^*TN, on

[1] Par exemple, pour les connaisseurs, une K3-surface n'est pas stablement parallélisable mais elle est presque parallélisable.

a donc :

$$df(TM) \oplus \nu = f^*TN$$

et par conséquent ν est isomorphe à $N(f)$ et l'on a donc un isomorphisme entre $df(TM) \oplus N(f)$ et f^*TN.

Si $N = \mathbb{R}^n$, puisque $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est trivial, $f^*T\mathbb{R}^n$ l'est aussi et par conséquent $df(TM) \oplus N(f)$ est trivial.

Proposition. − *a) M^m admet une immersion dans $\mathbb{R}^m \Rightarrow M^m$ est parallélisable.*
b) M^m orientable admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1} \Rightarrow M^m$ est stablement parallélisable.

Démonstration. − a) est évident.
b) Puisque $f^*T\mathbb{R}^{m+1}$ est trivial, il est orientable, d'autre part TM est orientable par hypothèse, ceci implique que $N(f)$ est orientable. Or $N(f)$ est de rang 1, le choix d'une orientation donne donc une section partout non nulle de $N(f) \to M$, donc une trivialisation. Ainsi $N(f) \simeq \epsilon$, d'où la conclusion. □

5 Exercices

Exercice 1. − a) Soit $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i=1,2}\}$ l'atlas de $\mathbb{S}^2$ où $\mathcal{U}_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $\mathcal{U}_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ et les φ_i sont des projections stéréographiques. Ecrire la fonction de transition t_{12} de $T\mathbb{S}^2$.
b) Montrer que sur $\mathbb{S}^2$ il n'existe pas de champ de vecteurs partout non nul. En déduire que $T\mathbb{S}^2$ n'est pas trivial.

Exercice 2. − Montrer qu'il existe une infinité de trivialisations non homotopes de $T\mathbb{T}^2$.

Exercice 3. − a) Montrer que $T^1\mathbb{S}^2 = \{v \in T\mathbb{S}^2 \mid |v| = 1\}$ est homéomorphe à $SO(3)$.
b) Montrer que $T^1\mathbb{S}^2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$ (*Suggestion.* Tout élément de $SO(3)$ est une rotation autour d'un d'axe et d'autre part on peut voir $\mathbb{R}P^3$ comme $D^3/\sim$ où $\sim$ identifie les points antipodaux du bord de la 3-boule $\partial D^3 = \mathbb{S}^2$).

Exercice 4. − Montrer que $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}P^3$, $\mathbb{S}^7$ et $\mathbb{R}P^7$ sont parallélisables (*Suggestion.* Utiliser les quaternions et les octonions).

Exercice 5. − Montrer que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$ est trivialisable.

Exercice 6. – Soient $E = D^2 \times \mathbb{R}^n \to D^2$ le fibré vectoriel produit de rang n et $H \to \partial D^2$ un sous-fibré vectoriel de $E_{|\partial D^2} \to \partial D^2$ de rang $m < n$. On suppose que $H \to \partial D^2$ admet une trivialisation, peut-on prolonger $H \to \partial D^2$ en un sous-fibré vectoriel $\tilde{H} \to D^2$ de $E \to D^2$?

Exercice 7. – Montrer que TM est orientable.

Exercice 8. – Existe-t-il une immersion du ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. – Soient M et N deux variétés stablement parallélisables. On suppose que M admet un champ de vecteurs partout non nul. Montrer que $M \times N$ est parallélisable. En déduire que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^5$ est parallélisable.

Exercice 10. – a) Montrer que le produit $\mathbb{S}^{n_1} \times \mathbb{S}^{n_2}$ se plonge dans $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$.
b) Montrer que tout produit de sphères $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}$ se plonge dans $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$.

6 Bibliographie

M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, PUG.

F. Laudenbach, *Topologie différentielle*, Cours donné à l'Ecole Polytechnique, 1994.

J. Davis et P. Kirk, *Lecture notes in Algebraic Topology (chapitre sur les fibrés)*, GSM, AMS.