Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Corrigé de l'examen du 8 janvier 2013

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Le lieu des points $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + y - 13 = 0\}$ est-il une hyperbole ? Justifier.

Rép.– La forme quadratique à l'infini de $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + y - 13$ est $q(x, y) = 5x^2 - 2xy + 2y^2$. Cette forme s'écrit $q(x, y) = {}^t XQX$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat montre que les valeurs propres de Q sont $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{7-\sqrt{13}}{2} > 0$. Ainsi, C est soit une ellipse, soit un point, soit vide. Ce ne peut être une hyperbole.

2.– Ecrire l'équation cartésienne de la tangente au point $P = (1, 1)$ de la conique euclidienne $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid 3x^2 - 10xy + y^2 + 4x + 3y - 1 = 0\}$.

Rép.– Soient $F(x, y) := 3x^2 - 10xy + y^2 + 4x + 3y - 1$ et $P = (x_0, y_0) \in C$. D'après le cours, si $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$, C admet une tangente en P dont une équation cartésienne est donnée par

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0.$$

On a $F_x(1, 1) = 0$ et $F_y(1, 1) = -5$ donc C admet une tangente en $(1, 1)$ dont une équation cartésienne est $y = 1$.

3.– Soient u, v, w trois nombres complexes distincts deux à deux. Ecrire une homographie envoyant u, v, w respectivement sur ∞, 0 et 1.

Rép.– L'homographie

$$h(z) = \frac{z-v}{z-u} : \frac{w-v}{w-u} = [z, w, v, u]$$

convient.

4.– Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et A un point de E. La *puissance $P_{\mathcal{C}}(A)$ de A par rapport à $\mathcal{C}$* est le nombre $A\Omega^2 - R^2$. Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.

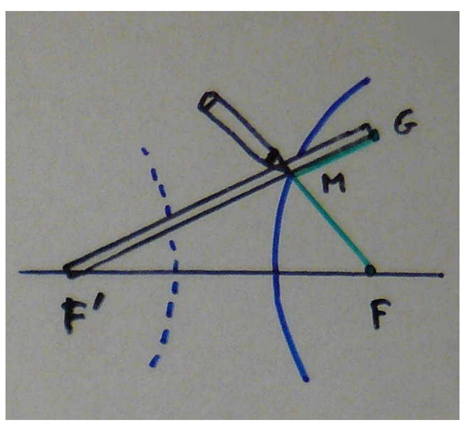
Rép.– Soit M'' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M'. On a

$$\begin{array}{rclcl} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle & = & \langle \overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{AM'} \rangle & = & \langle \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M''}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle \\ & = & \langle \overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle & = & A\Omega^2 - R^2. \end{array}$$

5.– Rappeler la construction d'une branche d'hyperbole au moyen d'un fil de longueur ℓ et une règle de longueur $\ell + 2a$.

Rép.– Un fil de longueur quelconque ℓ est attaché en l'extrémité G d'une règle de longueur $2a + \ell$ dont l'autre extrémité pivote autour de F', la pointe du crayon tend la ficelle le long de la règle et décrit une branche de l'hyperbole de foyer F et F' car on a

$$MF' - MF = (MF' + MG) - (MG + MF) = (2a + \ell) - \ell = 2a.$$



Le problème. – (10 pts) Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^2$ une droite d'un plan affine euclidien orienté, $O \in \mathbb{E}^2$ un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_0$ la droite passant par O et parallèle à $\mathcal{D}$. La *projection centrale* de centre O sur la droite $\mathcal{D}$ est l'application qui a tout point M de $\mathbb{E}^2 \setminus \mathcal{D}_0$ associe le point $M' \in \mathcal{D}$ tel que

O, M et M' sont alignés.

1) Les projections centrales sont-elles des applications affines ?

Rép.– Non, elles ne sont pas définies sur tout $\mathbb{E}^2$.

2) On munit $\mathbb{E}^2$ d'un repère orthonormé (O, e_1, e_2) et on note (x, y) les coordonnées d'un point M dans ce repère. Soit f la projection centrale de centre O sur la droite $\mathcal{D} = \{y = 1\}$. Déterminer les coordonnées de $f(M)$ pour tout $M \in \mathbb{E}^2 \setminus (Ox)$.

Rép.– Une équation cartésienne de la droite passant par O et M est $yX - xY = 0$. L'intersection de cette droite avec la droite $\{y = 1\}$ est un point de coordonnées $(\frac{x}{y}, 1)$. Ainsi

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{y}, 1\right).$$

3) Soient $A = (0, 1)$, Δ_+ la droite d'équation cartésienne $X + Y = 0$ et Δ_- la droite d'équation cartésienne $X - Y = 0$. Soit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq \pm 1$. On note D_m la droite d'équation cartésienne $Y = mX + 1$ et on pose $B = D_m \cap \Delta_+$ et $C = D_m \cap \Delta_-$. On note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. Montrer que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \iff m = 0.$$

En déduire que f ne conserve pas le rapport des distances de trois points alignés.

Rép.– On a $B = (-\frac{1}{1+m}, \frac{1}{1+m})$ et $C = (\frac{1}{1-m}, \frac{1}{1-m})$ d'où

$$AB = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{|m + 1|} \quad \text{et} \quad AC = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{|1 - m|}.$$

Ainsi, d'une part $\frac{AB}{AC} = \frac{|1-m|}{|1+m|}$ et d'autre part $A' = A$, $B' = (-1, 1)$ et $C' = (1, 1)$ d'où $\frac{A'B'}{A'C'} = 1$. L'égalité $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ n'a lieu que si $m = 0$.

4) Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4 quatre droites distinctes deux-à-deux et passant par O et soit Δ_0 une sécante coupant ces quatre droites respectivement en quatre points distincts A, B, C et D.

a) En choisissant judicieusement une nouvelle base (ϵ_1, ϵ_2), montrer que l'on peut toujours supposer que (Ox) est une perpendiculaire à Δ_0.

b) On suppose désormais que $\Delta_0 \perp (Ox)$ et on note $H = \Delta_0 \cap (Ox)$. On note α, β, γ, δ les angles orientés des couples de vecteurs $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OC})$, et $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OD})$. Montrer que

$$\overline{AC} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos\gamma \cos\alpha} \overline{OH}.$$

c) En déduire que le birapport

$$[A, B, C, B] := \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

est indépendant de la sécante Δ_0 (précisément, si Δ_0' est une autre sécante ayant quatre points d'intersection A', B', C', D', on a $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$).

Rép.– a) Soit $\Delta_0^{\perp}$ la perpendiculaire à Δ_0 passant par O. Il suffit de choisir pour ϵ_1 un vecteur directeur unitaire de $\Delta_0^{\perp}$.
b) On a

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \overline{HC} - \overline{HA} \\
&= \tan\gamma\, \overline{OH} - \tan\alpha\, \overline{OH} \\
&= \left(\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \overline{OH} \\
&= \frac{\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\alpha} \overline{OH} \\
&= \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} \overline{OH}.
\end{aligned}$$

c) De même $\overline{AD} = \frac{\sin(\delta-\alpha)}{\cos\delta\cos\alpha}\overline{OH}$ et $\overline{BC} = \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\gamma\cos\beta}\overline{OH}$, $\overline{BD} = \frac{\sin(\delta-\beta)}{\cos\delta\cos\beta}\overline{OH}$. Ainsi

$$[A, B, C, D] := \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\delta - \alpha)} : \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\delta - \beta)}$$

est indépendant de la sécante.

5) On suppose qu'aucun des points A, B, C ou D n'appartient à l'axe (Ox) et on note A', B', C' et D' leurs images par f. Montrer que

$$[A', B', C', D'] = [A, B, C, D],$$

autrement dit, que f conserve le birapport des distances de quatre points alignés.

Rép.– Par définition A', B', C' et D' appartiennent à la droite $\mathcal{D} = \{y = 1\}$ qui est une sécante à Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. D'après, la question précédente, le birapport est indépendant de la sécante. Or, ce birapport calculé avec la sécante $\mathcal{D}$ vaut $[A', B', C', D']$ et il vaut $[A, B, C, D]$ pour la sécante Δ_0.

6) Le birapport $[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4]$ de quatre droites concourantes en P est le birapport $[A, B, C, B]$ des quatre points d'intersections de ces quatre droites avec n'importe quelle sécante. On considère quatre points A, B, C, D d'un même cercle $\mathcal{C}$ et distincts deux-à deux. Soit M un point de ce même cercle et distinct des quatre autres points. Montrer que le birapport

$$[(MA), (MB), (MC), (MD)]$$

est indépendant de la position de M sur $\mathcal{C} \setminus \{A, B, C, D\}$.

Rép.– D'après la question 4, le birapport $[(MA), (MB), (MC), (MD)]$ ne dépend que des angles entre les vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})$, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})$, $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ et $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$. Or ces angles ne dépendent pas de la position de M sur $\mathcal{C}$.

7) On identifie $\mathbb{E}^2$ avec le plan complexe en prenant le point M de la question précédente comme origine et en choisissant l'axe des réels de telle façon qu'il passe par le centre Ω de $\mathcal{C}$. On choisit aussi les unités pour que le rayon de $\mathcal{C}$ soit 1. En particulier, l'affixe ω de Ω est le nombre 1.

a) Montrer que

$$z \in \mathcal{C} \iff z\overline{z} - z - \overline{z} = 0.$$

b) Montrer que la transformation $h : z \longmapsto \frac{1}{z}$ envoie $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ sur une droite verticale.

c) On note a, b, c et d (resp. a', b', c', d') les affixes des quatre points A, B, C et D de la question 6 (resp. les affixes des images A', B', C' et D' de ces quatre points par la transformation h). Montrer que

$$[a', b', c', d'] = \overline{[a, b, c, d]}.$$

(On rappelle que $[a, b, c, d] := \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}$).

d) En déduire que $[a', b', c', d'] = [a, b, c, d]$.

e) Montrer que

$$[(MA'), (MB'), (MC'), (MD')] = [(MA), (MB), (MC), (MD)].$$

f) Déduire de d) et de e) que

$$[(MA), (MB), (MC), (MD)] = [a, b, c, d].$$

Rép.– a) On a $z \in \mathcal{C}$ si et seulement si $|z-\omega|^2 = 1$ i. e. $(z-1)(\overline{z}-1) = 1$ qui est l'équation proposée.
b) L'application $z \longmapsto \frac{1}{z}$ transforme l'équation $z\overline{z} - z - \overline{z} = 0$ en $1 - \overline{z} - z = 0$ c'est-à-dire $Re(z) = \frac{1}{2}$.
c) On a

$$\begin{aligned}
[a',b',c',d'] &= \frac{c'-a'}{d'-a'} : \frac{c'-b'}{d'-b'} \\
&= \frac{\frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{a}}}{\frac{1}{\bar{d}} - \frac{1}{\bar{a}}} : \frac{\frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{b}}}{\frac{1}{\bar{d}} - \frac{1}{\bar{b}}} \\
&= \frac{\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{c}\bar{a}}}{\frac{\bar{a}-\bar{d}}{\bar{d}\bar{a}}} : \frac{\frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{c}\bar{b}}}{\frac{\bar{b}-\bar{d}}{\bar{d}\bar{b}}} \\
&= \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}} \\
&= \overline{[a,b,c,d]}.
\end{aligned}$$

d) Puisque a, b, c, et d sont cocycliques, on a $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$. Puisque a', b', c', et d' sont alignés (sur la droite $Re(z) = \frac{1}{2}$) on a aussi $[a',b',c',d'] \in \mathbb{R}$. D'après le c), c'est donc que $[a',b',c',d'] = [a,b,c,d]$.
e) Les points M, A et A' sont alignés car $arg(\frac{1}{\bar{z}}) = arg(z)$. De même pour les autres triplets (M,B,B'), (M,C,C') et (M,D,D'). Ainsi

$$(MA') = (MA), (MB') = (MB), (MC') = (MC) \quad \text{et} \quad (MD') = (MD)$$

d'où l'égalité des birapports.
f) Les points A', B', C' et D' étant alignés sur la droite $Re(z) = \frac{1}{2}$ on a $\overline{A'C'} = \frac{1}{i}(c'-a')$, etc... d'où

$$[A',B',C',B'] := \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} : \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{c'-a'}{d'-a'} : \frac{c'-b'}{d'-b'} = [a',b',c',d'].$$

Les questions d) et f) permettent d'en déduire immédiatement que

$$[(MA),(MB),(MC),(MD)] = [a,b,c,d].$$