Université Claude Bernard Lyon 1

M1 HPDS EADM – Géométrie

Examen du 29 novembre 2013 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Ecrire la permutation sur les sommets A, B, C, D induite par :

i) le retournement autour de la bimédiane des arêtes AC et BD

ii) la réflexion selon le plan médiateur de l'arête AC.

2.– Montrer que les trois médiatrices d'un triangle ABC non plat sont concourantes.

3.– Montrer que l'équation polaire d'une droite D ne passant pas par l'origine O est donnée par

$$\forall \theta \in \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[, \quad r(\theta) = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}$$

où h est la distance de O à D, α l'angle entre le segment $[OP]$ et l'horizontale, P étant le projeté orthogonal de O sur D.

4.– Montrer que le birapport de quatre nombres complexes est invariant par les similitudes directes.

5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^1 et $\beta = \gamma \circ \varphi$ un C^1-reparamétrage avec $\varphi : J \longrightarrow I$. Montrer que $Long(\gamma) = Long(\beta)$.

Le problème. – (10 pts) Soient E l'espace affine euclidien de dimension 3 orienté, D une droite de E, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ un vecteur non nul et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On note, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, r_λ la rotation d'axe D (orienté par $\overrightarrow{u}$) et d'angle $\alpha\lambda$ et $t_{\lambda\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.

1) On définit $f_\lambda := r_\lambda \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}}$.

i) Préciser la nature géométrique de f_λ (on discutera selon la valeur de λ).

ii) Montrer que $r_\lambda \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}} = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ r_\lambda$.

2) Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & Is_+(E) \\ & \lambda & \longmapsto & f_\lambda \end{array}$$

i) Montrer que Φ est un morphisme de groupe, c'est-à-dire que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\Phi(\lambda) \circ \Phi(\mu) = \Phi(\lambda + \mu)$.

ii) Montrer que Φ est injectif.

3) Soit A un point de D et Δ une droite perpendiculaire en A à D. On note, pour tout réel λ, $A_\lambda = f_\lambda(A)$ et $\Delta_\lambda = f_\lambda(\Delta)$ et s_λ le retournement d'axe Δ_λ. En particulier, s_0 est le retournement d'axe $\Delta_0 = \Delta$. On pose $g := f_\lambda \circ s_0 \circ f_\lambda^{-1}$.

i) Montrer que $Fix\ g = \Delta_\lambda$.

ii) Montrer que g est une involution i.e. $g \circ g = id_E$.

iii) Enoncer le théorème de classification des déplacements de l'espace. En déduire que $g = s_\lambda$.

4) Montrer que Δ_λ est perpendiculaire à D.

5) Soient $\overrightarrow{s_0}$ et $\overrightarrow{s_\lambda}$ les parties linéaires de s_0 et s_λ.

i) Montrer que les vecteurs de $\overrightarrow{D}$ sont fixes par $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}$.

ii) Soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_\lambda, \overrightarrow{e}_\lambda^{\perp})$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$ telle que $\overrightarrow{e}_1 \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{e}_\lambda \in \overrightarrow{\Delta_\lambda}$. Ecrire la matrice de $\overrightarrow{s_\lambda}$ dans cette base. En déduire que la restriction de $\overrightarrow{s_\lambda}$ au plan perpendiculaire à $\overrightarrow{D}$ est une réflexion vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta_\lambda}$.

iii) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$ un vecteur non nul. Montrer que l'angle $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{s_\lambda}(\overrightarrow{v}))$ vaut $2\lambda\alpha$.

iv) En déduire que $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}$ est la rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle $2\lambda\alpha$.

6) Montrer que $s_\lambda \circ s_0 = f_{2\lambda}$

7) Montrer que $f_{2\lambda} \circ s_0 = s_0 \circ f_{-2\lambda}$ (indication : s_λ est une involution).

8) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, écrire les composées $s_\lambda \circ f_\mu$, $f_\mu \circ s_\lambda$ et $s_\lambda \circ s_\mu$ sous la forme $f_\nu \circ s_0$ et déterminer ν.

9) Soit $M \neq A$ un point de Δ. On pose $H := \{f_\mu(M) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble H est globalement invariant par f_λ, i. e. $f_\lambda(H) = H$.

ii) Montrer que $s_0(H) = H$.

iii) Quelle est la nature géométrique de H ?