Université Claude Bernard Lyon 1

M1 HPDS EADM – Géométrie

Corrigé de l'examen du 29 novembre 2013

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Ecrire la permutation sur les sommets A, B, C, D induite par :

i) le retournement autour de la bimédiane des arêtes AC et BD

ii) la réflexion selon le plan médiateur de l'arête AC.

Rép.– i) $(ABCD) \longrightarrow (CDAB)$

ii) $(ABCD) \longrightarrow (CBAD)$

2.– Montrer que les trois médiatrices d'un triangle ABC non plat sont concourantes.

Rép.– La médiatrice Δ_{AB} de $[AB]$ et la médiatrice Δ_{BC} de $[BC]$ sont sécantes en un point O car le triangle est non plat. Ce point O est équidistant de A et de B (car $O \in \Delta_{AB}$) et de B et de C (car $O \in \Delta_{BC}$), il est donc équidistant de A et de C et par conséquent $O \in \Delta_{AC}$.

3.– Montrer que l'équation polaire d'une droite D ne passant pas par l'origine O est donnée par

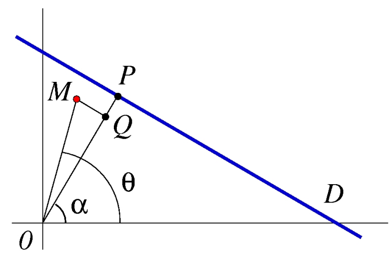
$$\forall \theta \in]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}[, \quad r(\theta) = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}$$

où h est la distance de O à D, α l'angle entre le segment $[OP]$ et l'horizontale, P étant le projeté orthogonal de O sur D.

Rép.– Soit (h, α) les coordonnées polaires de P. On a

$$\overline{OQ} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{et}$$

$$M \in D \iff Q = P \iff \overline{OQ} = h \iff r\cos(\theta - \alpha) = h.$$



4.– Montrer que le birapport de quatre nombres complexes est invariant par les similitudes directes.

Rép.– Les similitudes directes sont les transformations $z \longrightarrow \alpha z + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Soient f une similitude directe et a, b, c et d quatre nombres complexes distincts deux à deux. On a

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = \frac{\frac{f(a)-f(c)}{f(b)-f(c)}}{\frac{f(a)-f(d)}{f(b)-f(d)}} = \frac{\frac{(\alpha a+\beta)-(\alpha c+\beta)}{(\alpha b+\beta)-(\alpha c+\beta)}}{\frac{(\alpha a+\beta)-(\alpha d+\beta)}{(\alpha b+\beta)-(\alpha d+\beta)}} = \frac{\frac{\alpha(a-c)}{\alpha(b-c)}}{\frac{\alpha(a-d)}{\alpha(b-d)}} = \frac{\frac{a-c}{b-c}}{\frac{a-d}{b-d}} = [a, b, c, d].$$

5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^1 et $\beta = \gamma \circ \varphi$ un C^1-reparamétrage avec $\varphi : J \longrightarrow I$. Montrer que $Long(\gamma) = Long(\beta)$.

Rép.– Il suffit d'appliquer la formule de changement de variables dans une intégrale. En effet

$$\begin{aligned} Long(\beta) &= \int_J \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \int_J \|\gamma'(\varphi(t))\| . \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \int_I \|\gamma'(u)\| du \\ &= Long(\gamma). \end{aligned}$$

Le problème. – (10 pts) Soient E l'espace affine euclidien de dimension 3 orienté, D une droite de E, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ un vecteur non nul et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On note, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, r_λ la rotation d'axe D (orienté par $\overrightarrow{u}$) et d'angle $\alpha\lambda$ et $t_{\lambda\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.

1) On définit $f_\lambda := r_\lambda \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}}$.

i) Préciser la nature géométrique de f_λ (on discutera selon la valeur de λ).

ii) Montrer que $r_\lambda \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}} = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ r_\lambda$.

Rép.– i) Si $\alpha\lambda \not\equiv 0 \ \ [2\pi]$ alors f_λ est un vissage d'axe D et d'angle $\alpha\lambda$. Si $\alpha\lambda \equiv 0 \ \ [2\pi]$ alors f_λ est une translation de vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.
ii) La relation de conjugaison

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f$$

montre qu'une application affine f commute avec une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. C'est le cas ici puisque $\lambda\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ et donc $\overrightarrow{r_\lambda}(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$.

2) Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & Is_+(E) \\ & \lambda & \longmapsto & f_\lambda \end{array}$$

i) Montrer que Φ est un morphisme de groupe, c'est-à-dire que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\Phi(\lambda) \circ \Phi(\mu) = \Phi(\lambda + \mu)$.

ii) Montrer que Φ est injectif.

Rép.– i) Il suffit de faire jouer la commutation établie à la question précédente. En effet,

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda \circ f_\mu & = & r_\lambda \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ r_\mu \circ t_{\mu\overrightarrow{u}} \\ & = & r_\lambda \circ r_\mu \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ t_{\mu\overrightarrow{u}} \\ & = & r_{\lambda+\mu} \circ t_{(\lambda+\mu)\overrightarrow{u}} \\ & = & f_{\lambda+\mu}. \end{array}.$$

ii) On a $f_\lambda = id$ ssi $\alpha\lambda \equiv 0 \ \ [2\pi]$ et $\lambda\overrightarrow{u} = 0$, autrement dit, ssi $\lambda = 0$. Ainsi $Ker\ \Phi = 0$ et Φ est injective.

3) Soit A un point de D et Δ une droite perpendiculaire en A à D. On note, pour tout réel λ, $A_\lambda = f_\lambda(A)$ et $\Delta_\lambda = f_\lambda(\Delta)$ et s_λ le retournement d'axe Δ_λ. En particulier, s_0 est le retournement d'axe $\Delta_0 = \Delta$. On pose $g := f_\lambda \circ s_0 \circ f_\lambda^{-1}$.

i) Montrer que $Fix\ g = \Delta_\lambda$.

ii) Montrer que g est une involution i.e. $g \circ g = id_E$.

iii) Enoncer le théorème de classification des déplacements de l'espace. En déduire que $g = s_\lambda$.

Rép.– i) Un point M est dans $Fix\ g$ ssi

$$s_0 \circ f_\lambda^{-1}(M) = f_\lambda^{-1}(M) \Longleftrightarrow f_\lambda^{-1}(M) \in \Delta \Longleftrightarrow M \in \Delta_\lambda.$$

ii) On a $g \circ g = f_\lambda \circ s_0 \circ f_\lambda^{-1} \circ f_\lambda \circ s_0 \circ f_\lambda^{-1} = f_\lambda \circ s_0^2 \circ f_\lambda^{-1} = id_E$ car s_0 étant un retournement on a $s_0^2 = id_E$.

iii) Tout déplacement de l'espace est soit l'identité, soit une rotation, soit un vissage, soit une translation. Puisque $Fix\ g = \Delta_\lambda$, le déplacement g est soit une rotation, soit un vissage. Comme de plus g est une involution, ce ne peut-être qu'un retournement d'axe Δ_λ. Donc $g = s_\lambda$.

4) Montrer que Δ_λ est perpendiculaire à D.

Rép.– Les droites D et Δ sont perpendiculaire, f_λ est une isométrie et $f_\lambda(D) = D$, $f_\lambda(\Delta) = \Delta_\lambda$, donc D et Δ_λ sont perpendiculaires.

5) Soient $\overrightarrow{s_0}$ et $\overrightarrow{s_\lambda}$ les parties linéaires de s_0 et s_λ.

i) Montrer que les vecteurs de $\overrightarrow{D}$ sont fixes par $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}$.

ii) Soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_\lambda, \overrightarrow{e}_\lambda^\perp)$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$ telle que $\overrightarrow{e}_1 \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{e}_\lambda \in \overrightarrow{\Delta_\lambda}$. Ecrire la matrice de $\overrightarrow{s_\lambda}$ dans cette base. En déduire que la restriction de $\overrightarrow{s_\lambda}$ au plan perpendiculaire à $\overrightarrow{D}$ est une réflexion vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta_\lambda}$.

iii) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$ un vecteur non nul. Montrer que l'angle $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{s_\lambda}(\overrightarrow{v}))$ vaut $2\lambda\alpha$.

iv) En déduire que $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}$ est la rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle $2\lambda\alpha$.

Rép.– i) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$. Comme $\overrightarrow{\Delta}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{D}$, on a $\overrightarrow{s}_0(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$. De même $\overrightarrow{\Delta}_\lambda$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{D}$ donc $\overrightarrow{s_\lambda}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$. Au bilan, $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.

ii) La matrice du retournement $\overrightarrow{s_\lambda}$ d'axe $\overrightarrow{\Delta}_\lambda$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_\lambda, \overrightarrow{e}_\lambda^\perp)$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice montre clairement que la restriction de $\overrightarrow{s_\lambda}$ au plan $Vect(\overrightarrow{e}_\lambda, \overrightarrow{e}_\lambda^\perp) = \overrightarrow{D}^\perp$ est une réflexion.

iii) L'angle entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e}_\lambda$ est $\alpha\lambda\ [\pi]$ et donc l'angle entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{s_\lambda}(\overrightarrow{v})$ est $2\alpha\lambda\ [2\pi]$.

iv) La composée $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}$ est trivialement une rotation vectorielle dont l'axe est $\overrightarrow{D}$ d'après i). Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$ non nul. Notons que $\overrightarrow{s_0}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{s_\lambda}(\overrightarrow{v})$. Ainsi l'angle de la rotation $\overrightarrow{s_\lambda} \circ \overrightarrow{s_0}$ est donné par $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{s_\lambda}(\overrightarrow{v}))$.

6) Montrer que $s_\lambda \circ s_0 = f_{2\lambda}$

Rép.– L'image de A par $s_\lambda \circ s_0$ est le point symétrique de A par rapport à A_λ. C'est donc le point déduit de A par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AA_\lambda} = 2\lambda\overrightarrow{u}$. Avec la question précédente, on déduit que $s_\lambda \circ s_0$ est le vissage d'axe $\overrightarrow{D}$, d'angle $2\lambda\alpha$ et de vecteur $2\lambda\overrightarrow{u}$, i.e. $s_\lambda \circ s_0 = f_{2\lambda}$.

7) Montrer que $f_{2\lambda} \circ s_0 = s_0 \circ f_{-2\lambda}$ (indication : s_λ est une involution).

Rép.– Puisque s_λ est un retournement, on a $s_\lambda = s_\lambda^{-1}$. D'après la question précédente, on a aussi $s_\lambda = f_{2\lambda} \circ s_0$ d'où $s_\lambda^{-1} = s_0 \circ f_{2\lambda}^{-1} = s_0 \circ f_{-2\lambda}$. Puisque $s_\lambda = s_\lambda^{-1}$ on obtient la relation demandée.

8) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, écrire les composées $s_\lambda \circ f_\mu$, $f_\mu \circ s_\lambda$ et $s_\lambda \circ s_\mu$ sous la forme $f_\nu \circ s_0$ et déterminer ν.

Rép.– Avec la relation obtenue à la question précédente, il vient :

$$s_\lambda \circ f_\mu = f_{2\lambda} \circ s_0 \circ f_\mu = f_{2\lambda-\mu} \circ s_0,$$

$$f_\mu \circ s_\lambda = f_{\mu+2\lambda} \circ s_0,$$

et

$$s_\lambda \circ s_\mu = f_{2\lambda} \circ s_0 \circ f_{2\mu} \circ s_0 = f_{2(\lambda-\mu)}.$$

9) Soit $M \neq A$ un point de Δ. On pose $H := \{f_\mu(M) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble H est globalement invariant par f_λ, i. e. $f_\lambda(H) = H$.

ii) Montrer que $s_0(H) = H$.

iii) Quelle est la nature géométrique de H ?

Rép.– i) On a

$$f_\lambda(H) = \{f_\lambda(f_\mu((M)) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{f_{\lambda+\mu}(M) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = H.$$

ii) De même

$$s_0(H) = \{s_0 \circ f_\mu(M) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{f_{-\mu} \circ s_0(M) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Mais puisque M est un point de l'axe du retournement s_0, on a $s_0(M) = M$, d'où

$$s_0(H) = \{f_{-\mu}(M) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = H.$$

iii) L'ensemble H est une hélice circulaire.