Université Claude Bernard Lyon 1

M1 HPDS EADM – Géométrie

Examen du 1er décembre 2014 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Décrire géométriquement la similitude plane dont la forme complexe est $f(z) = (1+\sqrt{3}i)\overline{z} - 3 + \sqrt{3}i$.

2.– Écrire l'équation cartésienne de la tangente au point $P = (1,1)$ de la conique euclidienne $C = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 2y - 4 = 0\}$.

3.– Le lieu des points $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x^2 + 8xy - 6x + 17y + 1 = 0\}$ est-il une ellipse ? Justifier.

4.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

5.– Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière,

$$\begin{array}{rccc} S: & [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ & t & \longrightarrow & S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \end{array}$$

son abscisse curviligne et $\varphi : [0,L] \longrightarrow [a,b]$ l'inverse de S. Montrer que $s \longrightarrow \gamma \circ \varphi(s)$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

Le problème. – (10 pts) Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 orienté et D_1 et D_2 deux droites de E non coplanaires de vecteur directeur respectif $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ de norme 1. Le but de ce problème est d'étudier les isométries

f de E qui laissent globalement invariant l'union $D_1 \cup D_2$ de ces deux droites.

1) Montrer que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

2) On note $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal au plan $vect(\vec{u_1}, \vec{u_2})$. On note aussi P_1 (resp. P_2) le plan contenant D_1 (resp. D_2) et dont $\vec{n}$ est un vecteur directeur.

a) Montrer que $P_1 \cap P_2$ est une droite que l'on notera Δ.

b) Montrer que Δ coupe perpendiculairement les droites D_1 et D_2. On notera H_1 et H_2 les points d'intersection.

3) On note G le groupe des isométries de E qui laissent $\{D_1, D_2\}$ invariant. Soit $f \in G$ i.e. telle que

$$f(D_1 \cup D_2) = D_1 \cup D_2.$$

a) Montrer que soit $f(D_1) = D_1$, soit $f(D_1) = D_2$.

b) Montrer que $\vec{f}(\vec{n}) = \pm\vec{n}$.

c) Montrer que soit $f(P_1) = P_1$, soit $f(P_1) = P_2$.

d) Déduire de b. et de c. que $f(\Delta) = \Delta$.

e) Montrer que le milieu I de $[H_1H_2]$ est un point fixe de f.

4) Soit P le plan médiateur du segment $[H_1H_2]$.

a) Montrer que P est stable par f et que la restriction $f_{|P}$ de f à P est une isométrie plane à point fixe.

b) Énoncer le théorème de classification des isométries planes. Déterminer les types d'isométries possibles pour $f_{|P}$.

5) On suppose que $f_{|P} = Id_P$. Montrer que $f = Id_E$ (dans le raisonnement, on s'aidera du théorème de classification des isométries de l'espace et on veillera à distinguer le cas où $f(H_1) = H_2$ de celui où $f(H_1) = H_1$).

6) a) Montrer que le retournement r_0 autour de l'axe Δ est un élément de G.

b) Déterminer la restriction $(r_0)_{|P}$ de r_0 à P.

7) Soient d_1 (resp. d_2) la projection orthogonale de D_1 (resp. D_2) sur P et soient Δ_1 et Δ_2 les droites de P bissectrices du couple (d_1, d_2). On note $\vec{v_1}$ (resp. $\vec{v_2}$) un vecteur directeur de norme 1 de Δ_1 (resp. de Δ_2).

a) Montrer que si $f \in G$, alors $f_{|P}(d_1) = d_1$, soit $f_{|P}(d_1) = d_2$.

b) On note r_1 (resp. r_2) le retournement autour de Δ_1 (resp. Δ_2). Écrire la matrice de $\overrightarrow{r_1}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{n})$.

c) Montrer que l'on a $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_1}) = \pm\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_2}) = \pm\overrightarrow{u_1}$.

d) En déduire que r_1 et r_2 sont dans G.

8) On note G_+ le groupe engendré par r_1 et r_2.

a) Montrer que G_+ est abélien en déterminant les produits $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$.

b) Déterminer $r_1^{k_1} \circ r_2^{k_2}$ où $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. En déduire que G_+ a quatre éléments.

c) Le groupe G_+ est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$? Justifier.

9) a) On supppose qu'il existe une isométrie indirecte dans G que l'on note σ. Montrer que G possède alors au moins quatre isométries indirectes.

b) A votre avis, le groupe G possède-t-il une isométrie indirecte ? Justifier. (Attention ! Question sournoise et difficile à ne traiter qu'en dernier...)