Université Claude Bernard Lyon 1

M1 HPDS EADM – Géométrie

Examen du 30 novembre 2015 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient p nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

Montrer que f est une bijection.

2.– Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$ est stable par une application orthogonale $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ alors $\overrightarrow{F}^{\perp}$ est également stable par $\overrightarrow{f}$.

3.– Soit la famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ données par $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où les fonctions $a, b, c \in C^1(I)$ sont telles que

$$\forall t \in I, \quad (a(t), b(t)) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0.$$

Montrer que la courbe enveloppe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (x(t), y(t))$ est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

4.– Ecrire l'équation cartésienne de la tangente au point $P = (1,1)$ de la conique euclidienne $C = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid 5x^2 - 10xy - y^2 + 4x + 3y - 1 = 0\}$.

5.– Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière,

$$\begin{array}{cccc} S : & [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ & t & \longrightarrow & S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \end{array}$$

son abscisse curviligne et $\varphi : [0,L] \longrightarrow [a,b]$ l'inverse de S. Montrer que $s \longrightarrow \gamma \circ \varphi(s)$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

Le problème. – (10 pts) Soient E un plan affine euclidien orienté, O un point de E et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle *inversion* de pôle O et de rapport k la transformation

$$\begin{array}{cccc} I_{O,k} : & E \setminus \{O\} & \longrightarrow & E \setminus \{O\} \\ & M & \mapsto & M' = O + \dfrac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \end{array}$$

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés des inversions.

1) i) Montrer que $I_{O,k} \circ I_{O,k} = Id_{E\setminus\{O\}}$. En déduire que $I_{O,k}$ est inversible.
ii) Déterminer l'ensemble des points fixes de $I_{O,k}$ selon la valeur de k.

2) i) Déterminer la composée $I_{O,k} \circ I_{O,k'}$ de deux inversions de même pôle.
ii) Soit $h_{O,\lambda}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda \neq 0$. Déterminer $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k}$.
iii) Les inversions sont-elles des applications affines ?
iv) L'ensemble des inversions muni de la loi $\circ$ forme-t-il un groupe ?

3) On identifie le plan affine E à $\mathbb{C}$.
i) Si A est un point d'affixe a, montrer que l'inversion $I_{A,k}$ envoie le point d'affixe $z = x + iy$ sur le point d'affixe

$$z' = a + k\frac{(z-a)}{|z-a|^2}$$

ii) Soient $\mathcal{C}_0$ le cercle d'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, (D_m) la droite d'équation $y = mx$ et $\gamma(m) = x(m) + iy(m)$ le point d'intersection $D_m \cap (\mathcal{C}_0 \setminus \{O\})$. Déterminer l'affixe $x(m) + iy(m)$ de $\gamma(m)$.
iii) Soit $x+iy$ l'affixe d'un point quelconque de $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$. Montrer que $\gamma\left(\frac{y}{x}\right) = x + iy$.

iv) Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & E \simeq \mathbb{C} \\ & m & \longmapsto & \gamma(m) \end{array}$$

a pour support $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$.
v) Calculer $I_{O,1}(\gamma(m))$ et montrer que $I_{O,1}$ transforme $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$ en la droite tangente $T_1\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}_0$ en $z = 1$.

4) Soit $R_{A,\theta}$ la rotation de centre θ d'angle θ.
i) Montrer que $R_{A,\theta} \circ I_{A,k} = I_{A,k} \circ R_{A,\theta}$.
ii) Soit $\mathcal{C}_\theta$ le cercle de centre $\frac{e^{i\theta}}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Montrer que $I_{O,1}$ transforme $\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\}$ en sa droite tangente $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta$ en $z = e^{i\theta}$.

5) i) Montrer que $h_{A,\frac{1}{\lambda}} \circ I_{A,k} = I_{A,k} \circ h_{A,\lambda}$.
ii) Soit D une droite ne passant pas par l'origine. Montrer qu'il existe θ tel que D soit parallèle à $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta$.
iii) En déduire que $I_{O,1}$ transforme toute droite ne passant pas par l'origine O en un cercle épointé $\mathcal{C} \setminus \{O\}$.

6) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et A un point de E. La *puissance* $P_{\mathcal{C}}(A)$ *de* A *par rapport à* $\mathcal{C}$ est le nombre $A\Omega^2 - R^2$.
i) Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.
ii) On dit que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont *orthogonaux* quand ils sont sécants et que les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales. On note alors $\mathcal{C} \perp \mathcal{C}'$. Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (de centre Ω et Ω' et de rayon R et R') sont *orthogonaux* si et seulement si $P_{\mathcal{C}'}(\Omega) = R^2$, ou encore, si et seulement si $P_{\mathcal{C}}(\Omega') = R'^2$.
iii) Soient $I_{\Omega,k}$ une inversion avec $k > 0$, $\mathcal{C}$ son cercle de points fixes, M un point quelconque de E et M' son image par $I_{\Omega,k}$. Montrer que tous les cercles passant par M et M' sont orthogonaux au cercle $\mathcal{C}$.

7) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques de centre Ω et Ω' et de rayon R et R'. On considère

$$\mathcal{D} = \{M \in E \mid P_{\mathcal{C}}(M) = P_{\mathcal{C}'}(M)\}$$

i) Montrer que $\mathcal{D}$ est une droite perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$. Cette droite s'appelle l'*axe radical* de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

ii) On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est non vide et on considère un point $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. Montrer que $A \in \mathcal{D}$.

8) Soient A et B deux points de $E \setminus \{\Omega\}$, et A', B' leurs images par $I_{\Omega,k}$, $k > 0$. On suppose que les points A, A' et B sont tous distincts.
i) Montrer que si A, A' et B sont alignés alors B' est sur la droite (AA').
ii) Montrer que si A, A' et B sont cocycliques alors B' appartient au cercle passant par A, A' et B.
Indication : on pourra considérer les puissances $P_{\mathcal{C}}(\Omega)$ et $P_{\mathcal{C}'}(\Omega)$ où $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A, A' et B et $\mathcal{C}'$ le cercle passant par B, B' et A.