Université Claude Bernard Lyon 1

M1 HPDS EADM – Géométrie

Corrigé de l'examen du 30 novembre 2015

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient p nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

Montrer que f est une bijection.

Rép.– Soit $O \in E$. La relation de Chasles entraîne

$$f(M) = f(O) + \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{MO}.$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, l'équation $f(M) = \overrightarrow{u}$ a une unique solution donnée par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda}\left(f(O) - \overrightarrow{u}\right).$$

2.– Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$ est stable par une application orthogonale $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ alors $\overrightarrow{F}^{\perp}$ est également stable par $\overrightarrow{f}$.

Rép.– Soit $y \in \overrightarrow{F}^{\perp}$, il faut montrer que $\overrightarrow{f}(y) \in \overrightarrow{F}^{\perp}$. Par définition

$$y \in \overrightarrow{F}^{\perp} \iff \forall x \in \overrightarrow{F} \ : \ \langle x, y \rangle = 0.$$

Puisque $\overrightarrow{F}$ est stable $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) \subset \overrightarrow{F})$ et comme $\overrightarrow{f}$ est une application orthogonale, elle est bijective et on a en fait $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} y \in \overrightarrow{F}^{\perp} & \iff & \forall x \in \overrightarrow{F} \ : \ \langle y, \overrightarrow{f}^{-1}(x) \rangle = 0 \\ & \iff & \forall x \in \overrightarrow{F} \ : \ \langle \overrightarrow{f}(y), x \rangle = 0 \\ & \iff & \overrightarrow{f}(y) \in \overrightarrow{F}^{\perp}. \end{array}$$

3.– Soit la famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ données par $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où les fonctions $a, b, c \in C^1(I)$ sont telles que

$$\forall t \in I, \quad (a(t), b(t)) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0.$$

Montrer que la courbe enveloppe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (x(t), y(t))$ est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

Rép.– Les conditions

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in D_t \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \in \overrightarrow{D_t}$$

conduisent aux deux équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

En dérivant la première équation et compte tenu de la seconde, ce système implique le suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

dont la résolution fournit les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ de l'énoncé.

4.– Ecrire l'équation cartésienne de la tangente au point $P = (1,1)$ de la conique euclidienne $C = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid 5x^2 - 10xy - y^2 + 4x + 3y - 1 = 0\}$.

Rép.– Soient $F(x,y) := 5x^2 - 10xy - y^2 + 4x + 3y - 1$ et $P = (x_0, y_0) \in C$. D'après le cours, si $(F_x(x_0,y_0), F_y(x_0,y_0)) \neq (0,0)$, C admet une tangente en P dont une équation cartésienne est donnée par

$$(x - x_0)F_x(x_0,y_0) + (y - y_0)F_y(x_0,y_0) = 0.$$

On a $F_x(1,1) = 4$ et $F_y(1,1) = -9$ donc C admet une tangente en $(1,1)$ dont une équation cartésienne est $9y - 4x = 5$.

5.– Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière,

$$\begin{array}{rccc} S: & [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ & t & \longrightarrow & S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \end{array}$$

son abscisse curviligne et $\varphi : [0,L] \longrightarrow [a,b]$ l'inverse de S. Montrer que $s \longrightarrow \gamma \circ \varphi(s)$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

Rép.– Puisque $S \circ \varphi = id$ on a

$$\forall s \in [0,L], \qquad \varphi'(s) = \frac{1}{S'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

Or

$$(\gamma \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s)) = \frac{\gamma'(\varphi(s))}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

Par conséquent $\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = 1$ pour tout $s \in [0,L]$.

Le problème. – (10 pts) Soient E un plan affine euclidien orienté, O un point de E et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle *inversion* de pôle O et de rapport k la transformation

$$\begin{array}{rccc} I_{O,k}: & E \setminus \{O\} & \longrightarrow & E \setminus \{O\} \\ & M & \mapsto & M' = O + \dfrac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \end{array}$$

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés des inversions.

1) i) Montrer que $I_{O,k} \circ I_{O,k} = Id_{E \setminus \{O\}}$. En déduire que $I_{O,k}$ est inversible.
ii) Déterminer l'ensemble des points fixes de $I_{O,k}$ selon la valeur de k.

Rép.– i) De la relation

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$$

on déduit

$$OM'^2 = \frac{k^2}{OM^4}OM^2 = \frac{k^2}{OM^2}$$

Par conséquent

$$I_{O,k} \circ I_{O,k}(M) = I_{O,k}(M') = \left(O + \frac{k}{OM'^2}\overrightarrow{OM'}\right) = \left(O + \frac{OM^2}{k}\frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}\right) = M.$$

Ainsi $I_{O,k} \circ I_{O,k} = Id_{E \setminus \{O\}}$ et $I_{O,k}^{-1} = I_{O,k}$.
ii) Soit $M \in E \setminus \{O\}$ un point fixe de f, on a :

$$f(M) = M \iff \overrightarrow{OM} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \iff k = OM^2.$$

Par conséquent, si $k > 0$ l'ensemble des points fixes est un cercle de rayon $\sqrt{k}$. Si $k < 0$, cet ensemble est vide.

2) i) Déterminer la composée $I_{O,k} \circ I_{O,k'}$ de deux inversions de même pôle.
ii) Soit $h_{O,\lambda}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda \neq 0$. Déterminer $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k}$.
iii) Les inversions sont-elles des applications affines ?
iv) L'ensemble des inversions muni de la loi $\circ$ forme-t-il un groupe ?

Rép.– i) On a

$$I_{O,k} \circ I_{O,k'}(M) = I_{O,k}(M') = \left(O + \frac{k}{OM'^2}\overrightarrow{OM'}\right) = \left(O + \frac{kOM^2}{k'^2}\frac{k'}{OM^2}\overrightarrow{OM}\right)$$
$$= O + \frac{k}{k'}\overrightarrow{OM}$$

ainsi $I_{O,k} \circ I_{O,k'}$ est l'homothétie $h_{O,\frac{k}{k'}}$ de centre O et de rapport $\frac{k}{k'}$ restreinte à $E \setminus \{O\}$.
ii) On a

$$h_{O,\lambda} \circ I_{O,k}(M) = h_{O,\lambda}(M') = O + \lambda\overrightarrow{OM'} = O + \frac{\lambda k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$$

ainsi $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k}$ est l'inversion de centre O et de rapport λk.
iii) Non. D'abord elles ne sont pas définies sur tout E. Ensuite, si $k > 0$ le lieu des points fixes est un cercle, et non un sous-espace affine. Si $k < 0$, alors le lieu des points fixes de $h_{O,-1} \circ I_{O,k}$ est encore un cercle. Par conséquent $h_{O,-1} \circ I_{O,k}$ ne peut être affine, ce qui implique, puisque $h_{O,-1}$ est affine, que $I_{O,k}$ ne l'est pas.
iv) Non, l'ensemble des inversions n'est pas un groupe puisque la composée $I_{O,k} \circ I_{O,k'}$ est une homothétie et non une inversion.

3) On identifie le plan affine E à $\mathbb{C}$.
i) Si A est un point d'affixe a, montrer que l'inversion $I_{A,k}$ envoie le point d'affixe $z = x + iy$ sur le point d'affixe

$$z' = a + k\frac{(z-a)}{|z-a|^2}$$

ii) Soient $\mathcal{C}_0$ le cercle d'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, (D_m) la droite d'équation $y = mx$ et $\gamma(m) = x(m) + iy(m)$ le point d'intersection $D_m \cap (\mathcal{C}_0 \setminus \{O\})$. Déterminer l'affixe $x(m) + iy(m)$ de $\gamma(m)$.
iii) Soit $x+iy$ l'affixe d'un point quelconque de $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$. Montrer que $\gamma\left(\frac{y}{x}\right) =$

$x + iy$.
iv) Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & E \simeq \mathbb{C} \\ & m & \longmapsto & \gamma(m) \end{array}$$

a pour support $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$.
v) Calculer $I_{O,1}(\gamma(m))$ et montrer que $I_{O,1}$ transforme $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$ en la droite tangente $T_1\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}_0$ en $z = 1$.

Rép.– i) Si M a pour affixe z, la relation

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{k}{AM^2}\overrightarrow{AM}$$

s'écrit

$$z' - a = \frac{k}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}(z-a)$$

d'où la relation demandée.
ii) En substituant $y = mx$ dans $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ il vient

$$x((1+m^2)x - 1) = 0.$$

La solution $x = 0$ est à exclure car elle correspond au point O. Il reste donc $x = \frac{1}{m^2+1}$ et $y = \frac{m}{m^2+1}$.
iii) On a

$$\gamma(m) = \gamma\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} + i\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = \frac{x}{x^2+y^2}(x+iy)$$

Puisque $x + iy$ est un point de $\mathcal{C}_0$ on a aussi

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \iff x^2 + y^2 = x.$$

Par conséquent $\gamma\left(\frac{y}{x}\right) = x + iy$.
iv) Par construction $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$. Il suffit donc de montrer la surjectivité de γ. Notons que si $x+iy$ est l'affixe d'un point quelconque de $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$ alors $x > 0$. D'après la question précédente $\gamma\left(\frac{y}{x}\right) = x + iy$ d'où la surjectivité.
v) On a $I_{O,1}(z) = \frac{z}{|z|^2}$ et $\gamma(m) = \frac{1+im}{1+m^2}$ d'où $|\gamma(m)|^2 = \frac{1}{1+m^2}$ et

$$I_{O,1}(\gamma(m)) = \frac{1+im}{1+m^2} \times (1+m^2) = 1 + im$$

Ainsi $I_{O,1}$ transforme $\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}$ en la droite $x = 1$, c'est-à-dire en la droite tangente à $\mathcal{C}_0$ en $z = 1$.

4) Soit $R_{A,\theta}$ la rotation de centre θ d'angle θ.
i) Montrer que $R_{A,\theta} \circ I_{A,k} = I_{A,k} \circ R_{A,\theta}$.
ii) Soit $\mathcal{C}_\theta$ le cercle de centre $\frac{e^{i\theta}}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Montrer que $I_{O,1}$ transforme $\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\}$ en sa droite tangente $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta$ en $z = e^{i\theta}$.

Rép.– i) On a $R_{A,\theta}(z) = a + e^{i\theta}(z-a)$ d'où

$$\begin{aligned} R_{A,\theta} \circ I_{A,k}(z) &= a + e^{i\theta}\left(\left(a + \frac{k(z-a)}{|z-a|^2}\right) - a\right) \\ &= a + \frac{k(e^{i\theta}z - e^{i\theta}a)}{|e^{i\theta}z - e^{i\theta}a|^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{A,k} \circ R_{A,\theta}(z) &= a + \frac{k((a + e^{i\theta}(z-a)) - a)}{|(a + e^{i\theta}(z-a)) - a|^2} \\ &= a + \frac{k(e^{i\theta}z - e^{i\theta}a)}{|e^{i\theta}z - e^{i\theta}a|^2} \end{aligned}$$

Ainsi $R_{A,\theta} \circ I_{A,k} = I_{A,k} \circ R_{A,\theta}$.
ii) On a $\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\} = R_{O,\theta}(\mathcal{C}_0 \setminus \{O\})$ et $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta = R_{O,\theta}(T_1\mathcal{C}_0)$. Ainsi

$$I_{O,1}(\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\}) = I_{O,1} \circ R_{O,\theta}(\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}) = R_{O,\theta} \circ I_{O,1}(\mathcal{C}_0 \setminus \{O\}) = R_{O,\theta}(T_1\mathcal{C}_0) = T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta.$$

5) i) Montrer que $h_{A,\frac{1}{\lambda}} \circ I_{A,k} = I_{A,k} \circ h_{A,\lambda}$.
ii) Soit D une droite ne passant pas par l'origine. Montrer qu'il existe θ tel que D soit parallèle à $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta$.
iii) En déduire que $I_{O,1}$ transforme toute droite ne passant pas par l'origine O en un cercle épointé $\mathcal{C} \setminus \{O\}$.

Rép.– i) On a

$$h_{A,\frac{1}{\lambda}} \circ I_{A,k}(z) = a + \frac{k(z-a)}{\lambda|z-a|^2} = I_{A,\frac{k}{\lambda}}$$

d'après la question 2.ii) et

$$I_{A,k} \circ h_{A,\lambda}(z) = a + \frac{k\left((a + \lambda(z-a)) - a\right)}{|(a + \lambda(z-a)) - a|^2} = a + \frac{k\lambda(z-a)}{|\lambda(z-a)|^2} = a + \frac{k(z-a)}{\lambda|z-a|^2} = I_{A,\frac{k}{\lambda}}$$

ii) Soit D une droite quelconque ne passant pas par l'origine. Soit Δ la perpendiculaire à D passant par l'origine. Notons θ l'angle entre l'axe des réels et Δ. Un vecteur directeur de D est donc $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Or, v_θ est également vecteur directeur de $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta$. Par conséquent, les deux droites sont parallèles.
iii) Puisque D et $T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta$ sont parallèles, il existe une homothétie $h_{O,\lambda}$ telle que $h_{O,\lambda}(T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta) = D$. On a donc

$$I_{O,1}(D) = I_{O,1}(h_{O,\lambda}(T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta)) = h_{O,\frac{1}{\lambda}}(I_{O,1}(T_{e^{i\theta}}\mathcal{C}_\theta)) = h_{O,\frac{1}{\lambda}}(\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\})$$

et $h_{O,\frac{1}{\lambda}}(\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\})$ est cercle privé de l'origine. Précisément, si $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[OH]$ où $H = \Delta \cap D$, alors $h_{O,\frac{1}{\lambda}}(\mathcal{C}_\theta \setminus \{O\}) = \mathcal{C} \setminus \{O\}$.

6) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et A un point de E. La *puissance $P_\mathcal{C}(A)$ de A par rapport à $\mathcal{C}$* est le nombre $A\Omega^2 - R^2$.
i) Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_\mathcal{C}(A)$.
ii) On dit que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont *orthogonaux* quand ils sont sécants et que les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales. On note alors $\mathcal{C} \perp \mathcal{C}'$. Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (de centre Ω et Ω' et de rayon R et R') sont *orthogonaux* si et seulement si $P_{\mathcal{C}'}(\Omega) = R^2$, ou encore, si et seulement si $P_\mathcal{C}(\Omega') = R'^2$.
iii) Soient $I_{\Omega,k}$ une inversion avec $k > 0$, $\mathcal{C}$ son cercle de points fixes, M un point quelconque de E et M' son image par $I_{\Omega,k}$. Montrer que tous les cercles passant par M et M' sont orthogonaux au cercle $\mathcal{C}$.

Rép.– i) Soit M'' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M'. On a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle &= \langle \overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{AM'} \rangle &&= \langle \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M''}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle &&= A\Omega^2 - R^2. \end{aligned}$$

ii) En appliquant le théorème de Pythagore, il vient immédiatement

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff \Omega\Omega'^2 = R^2 + R'^2$$

Or $P_\mathcal{C}(\Omega') = \Omega\Omega'^2 - R^2$ donc

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff P_\mathcal{C}(\Omega') = R'^2.$$

De même $P_{\mathcal{C}'}(\Omega) = \Omega'\Omega^2 - R'^2$ et donc

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff P_{\mathcal{C}'}(\Omega) = R^2.$$

iii) Soit $\mathcal{C}'$ un cercle passant par M et M'. On a

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff P_{\mathcal{C}'}(\Omega) = k$$

car le cercle $\mathcal{C}$ des points fixes de $I_{\Omega,k}$ est de rayon $\sqrt{k}$ d'après la question 1) ii. Or

$$P_{\mathcal{C}'}(\Omega) = \langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \rangle = \langle \overrightarrow{\Omega M}, \frac{k}{\Omega M^2} \overrightarrow{\Omega M} \rangle = k.$$

7) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques de centre Ω et Ω' et de rayon R et R'. On considère

$$\mathcal{D} = \{M \in E \mid P_\mathcal{C}(M) = P_{\mathcal{C}'}(M)\}$$

i) Montrer que $\mathcal{D}$ est une droite perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$. Cette droite s'appelle l'*axe radical* de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
ii) On suppose que $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$ est non vide et on considère un point $A\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$. Montrer que $A\in\mathcal{D}$.

Rép.– i) On a

$$\begin{array}{rcl} M\in\mathcal{D} & \Longleftrightarrow & P_{\mathcal{C}}(M)=P_{\mathcal{C}'}(M)\\ & \Longleftrightarrow & M\Omega^2-R^2=M\Omega'^2-R'^2\\ & \Longleftrightarrow & M\Omega^2-M\Omega'^2=R^2-R'^2\\ & \Longleftrightarrow & \langle\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega' M},\overrightarrow{\Omega M}-\overrightarrow{\Omega' M}\rangle=R^2-R'^2\\ & \Longleftrightarrow & \langle\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega' M},\overrightarrow{\Omega\Omega'}\rangle=R^2-R'^2\\ & \Longleftrightarrow & \langle 2\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega'\Omega},\overrightarrow{\Omega\Omega'}\rangle=R^2-R'^2\\ & \Longleftrightarrow & \langle\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega\Omega'}\rangle=\dfrac{1}{2}(R^2-R'^2+\Omega\Omega'^2)\end{array}$$

Puisque les cercles ne sont pas concentriques $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\neq\overrightarrow{0}$ et la dernière relation montre que l'ensemble $\mathcal{D}$ est une droite perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$.
ii) Pour tout point $M\in\mathcal{C}$, on a $P_{\mathcal{C}}(M)=0$. De même, pour tout point $M\in\mathcal{C}'$, on a $P_{\mathcal{C}'}(M)=0$. Donc si $A\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$ alors $P_{\mathcal{C}}(A)=P_{\mathcal{C}'}(A)=0$ et par conséquent $A\in\mathcal{D}$.

8) Soient A et B deux points de $E\setminus\{\Omega\}$, et A', B' leurs images par $I_{\Omega,k}$, $k>0$. On suppose que les points A, A' et B sont tous distincts.
i) Montrer que si A, A' et B sont alignés alors B' est sur la droite (AA').
ii) Montrer que si A, A' et B sont cocycliques alors B' appartient au cercle passant par A, A' et B.
Indication : on pourra considérer les puissances $P_{\mathcal{C}}(\Omega)$ et $P_{\mathcal{C}'}(\Omega)$ où $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A, A' et B et $\mathcal{C}'$ le cercle passant par B, B' et A.

Rép.– i) Nécessairement $A'\in(\Omega A)$ et $B'\in(\Omega B)$. Si $B\in(AA')=(\Omega A)$ alors $(\Omega A)=(\Omega B)$ et $B'\in(\Omega A)=(AA')$.
ii) Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par A, A' et B. On a

$$P_{\mathcal{C}}(\Omega)=\langle\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\rangle=\langle\overrightarrow{\Omega A},\frac{k}{\Omega A^2}\overrightarrow{\Omega A}\rangle=k$$

De même, soit $\mathcal{C}'$ le cercle passant par B, B' et A. On a

$$P_{\mathcal{C}'}(\Omega)=\langle\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega B'}\rangle=\langle\overrightarrow{\Omega B},\frac{k}{\Omega B^2}\overrightarrow{\Omega B}\rangle=k$$

Ainsi $P_{\mathcal{C}}(\Omega)=P_{\mathcal{C}'}(\Omega)$. Supposons que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ne sont pas concentriques. Alors, d'après la question précédente, Ω appartient à l'axe radical $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Mais puisque

$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$, on a $\mathcal{D} = (AB)$ et Ω, A et B sont alignés. Mais puisque $A' \in (\Omega A)$, $B' \in (\Omega B)$ on en déduit que Ω, A, A', B et B' sont alignés. Contradiction. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont donc même centre. Enfin, puisque $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$, ils ont aussi même rayon, i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.