Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé de l'examen du 16 novembre 2017

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $\overrightarrow{f}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $\overrightarrow{f}$.

Rép.– On calcule d'abord le polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Les valeurs propres sont donc 1 et -1. Déterminons d'abord l'espace propre $E_1(\overrightarrow{f})$ associé à la valeur propre $\lambda = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f}) &\iff \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\cos\theta - 1)x + \sin\theta y & = & 0 \\ \sin\theta x - (1+\cos\theta) y & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\, x + 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\, y & = & 0 \\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\, x - 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\, y & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Puisque $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on peut conserver les équivalences en simplifiant par $\sin\frac{\theta}{2}$ ou $\cos\frac{\theta}{2}$. On a donc

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f}) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\sin\dfrac{\theta}{2}\, x + \cos\dfrac{\theta}{2}\, y & = & 0 \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\, x - \cos\dfrac{\theta}{2}\, y & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f}) \iff \sin\frac{\theta}{2}\, x - \cos\frac{\theta}{2}\, y = 0$$

Ainsi $E_1(\overrightarrow{f})$ est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur

$$\overrightarrow{u}_\theta = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{e}_1 + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{e}_2.$$

Similairement, on montre que $E_{-1}(\overrightarrow{f})$ est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur

$$\overrightarrow{v}_\theta = -\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{e}_1 + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{e}_2.$$

2.– Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

Rép.– Soit M une matrice orthogonale, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre et X un vecteur propre non nul. On a

$$\begin{aligned} MX = \lambda X \quad &\Longrightarrow \quad {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X} \\ &\Longrightarrow \quad {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M}MX = \overline{\lambda}\lambda\,{}^t\overline{X}X \end{aligned}$$

avec ${}^t\overline{M}M = Id$ puisque M est orthogonale. Ainsi $\overline{\lambda}\lambda = 1$

3.– Donner la définition exacte d'un angle orienté de vecteurs.

Rép.– L'*angle orienté de vecteurs* d'un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs unitaires du plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{P}$ est la classe d'équivalence de ce couple modulo l'action du groupe $SO(\overrightarrow{P})$. L'angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls quelconque est l'angle orienté obtenu en les normant.

4.– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier.

i) Écrire la permutation sur les sommets A, B, C, D induite le retournement autour de la bimédiane des arêtes AC et BD.

ii) La connaissance de cette seule permutation permet-elle de retrouver l'isométrie ? On justifiera la réponse.

Rép.– i) $(ABCD) \longrightarrow (CDAB)$

ii) Oui car une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est entièrement déterminée par l'image de quatre points affinement indépendants et c'est le cas des points A, B, C et D.

5.– Soit f une isométrie de forme complexe $z \mapsto e^{2i\varphi}\overline{z}+b$ où $\varphi \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$. Montrer que si $b + e^{2i\varphi}\overline{b} \neq 0$ alors f n'a pas de point fixe.

Rép.– Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

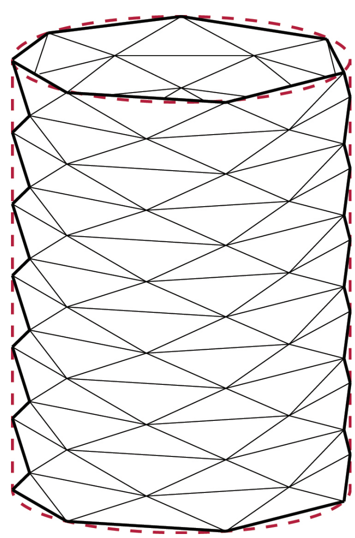
$$f \circ f(z) = z + b + e^{2i\varphi}\overline{b} \neq z$$

donc $f \circ f$ n'a pas de point fixe. Or si z était un point fixe de f, il serait également point fixe de $f \circ f$. Contradiction.

Le problème. – (10 pts) On note $E = (\mathbb{R}^3, \langle ., . \rangle)$ l'espace affine euclidien et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ un repère orthonormée de E. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. On considère les $2n$ points $P_0, ..., P_{n-1}$, $Q_0, ..., Q_{n-1}$ de E dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{aligned} P_k &:= (R\cos\frac{2k\pi}{n}, R\sin\frac{2k\pi}{n}, 0) \\ Q_k &:= (R\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}, R\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, h) \end{aligned}$$

pour $k \in \{0, ..., n-1\}$. On convient d'une convention circulaire pour les indices $P_n = P_0$, $P_{n+1} = P_1$, $Q_n = Q_0$, etc.



Le but de ce problème est l'étude du *Lampion de Schwarz* (illustration ci-dessus). Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet.

1) i) Montrer que les points P_k (resp. les points Q_k) sont coplanaires et que les deux plans qui les contiennent sont parallèles.
ii) Montrer que les points P_k et Q_k sont contenus dans un cylindre que l'on déterminera.

Rép.– i) Soient Π_0 et Π_h les plans horizontaux d'altitude $z = 0$ et $z = h$. On a immédiatement $P_k \in \Pi_0$, $Q_k \in \Pi_h$ et $\Pi_0 // \Pi_h$.
ii) Soit $O = (0,0,0)$ l'origine de $\mathbb{R}^3$ et $\Omega_h = (0,0,h)$, on a

- $\overrightarrow{OP}_k \in \overrightarrow{\Pi}$ et $\overrightarrow{\Omega_h Q}_k \in \overrightarrow{\Pi}$
- $\|\overrightarrow{OP}_k\| = \|\overrightarrow{\Omega_h Q}_k\| = R$

Par conséquent, P_k et Q_k appartiennent à un cylindre circulaire dont l'axe est (Oz) et le rayon R.

2) i) Soit $\overrightarrow{\Pi} = Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $\overrightarrow{D} = Vect(\overrightarrow{e}_3)$. On note $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\Pi}}$ la réflexion par rapport à $\overrightarrow{\Pi}$ et $\overrightarrow{Rot}_{\overrightarrow{D},\theta}$ la rotation d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle θ. Écrire la matrice de l'anti-rotation vectorielle $\overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi},\overrightarrow{D},\theta} = \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\Pi}} \circ \overrightarrow{Rot}_{\overrightarrow{D},\theta}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$.
ii) Soient $z \in \mathbb{R}$ et Ω_z le point de coordonnées $(0,0,z)$. On pose $\Pi_z = \Omega_z + Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $D = \Omega_z + Vect(\overrightarrow{e}_3)$ et on considère l'anti-rotation affine $f = s_{\Pi_z} \circ Rot_{D,\theta} = Rot_{D,\theta} \circ s_{\Pi_z}$ de plan Π_z, d'axe D et d'angle θ. En admettant que $\overrightarrow{f}$ est l'anti-rotation vectorielle $\overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi},\overrightarrow{D},\theta}$. Montrer que

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\Omega_z M'} = \overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi},\overrightarrow{D},\theta}(\overrightarrow{\Omega_z M})$$

où $M' = f(M)$.

Rép.– i) L'application $\overrightarrow{f}$ restreinte à $\overrightarrow{\Pi_z}$ est une rotation d'angle θ et $\overrightarrow{f}_{|\overrightarrow{D}}$ est la multiplication scalaire par -1 d'où la matrice dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Notons d'abord que Ω_z est point fixe de f_z. En effet, puisque $\Omega_z \in D$, on a $Rot_{D,\theta}(\Omega_z) = \Omega_z$ et puisque $\Omega_z \in \Pi_z$, on a $s_{\Pi_z}(\Omega_z) = \Omega_z$. On écrit ensuite la formule de Grassmann : pour tout $M \in E$, on a

$$f(M) = f(\Omega_z) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega_z M})$$

qui devient ici

$$M' = \Omega_z + \overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi},\overrightarrow{D},\theta}(\overrightarrow{\Omega_z M})$$

ce qui est la relation demandée.

3) Soient $P'_k = f(P_k)$ et $Q'_k = f(Q_k)$.
i) Montrer que

$$\overrightarrow{\Omega_z P'_k} = \left(R\cos(\theta + \frac{2k\pi}{n}), R\sin(\theta + \frac{2k\pi}{n}), z\right).$$

ii) Déterminer θ et z pour que $P'_k = Q_k$.
iii) Montrer qu'alors $Q'_k = P_{k+1}$.

Rép.– i) On a $\overrightarrow{\Omega_z P_k} = (R\cos\frac{2k\pi}{n}, R\sin\frac{2k\pi}{n}, -z)$ d'où

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega_z P'_k} &= \overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi},\overrightarrow{D},\theta}(\overrightarrow{\Omega_z P_k}) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\cos\frac{2k\pi}{n} \\ R\sin\frac{2k\pi}{n} \\ -z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R(\cos\theta\cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\theta\sin\frac{2k\pi}{n}) \\ R(\sin\theta\cos\frac{2k\pi}{n} + \cos\theta\sin\frac{2k\pi}{n}) \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R\cos(\theta + \frac{2k\pi}{n}) \\ R\sin(\theta + \frac{2k\pi}{n}) \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ii) On a

$$\overrightarrow{\Omega_z Q_k} = \left(R\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}, R\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, h - z\right)$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_z P'_k} = \left(R\cos(\theta + \frac{2k\pi}{n}), R\sin(\theta + \frac{2k\pi}{n}), z\right).$$

Pour avoir $P'_k = Q_k$ il faut donc $\theta = \frac{\pi}{n}$ (modulo 2π) et $z = h/2$.
iii) Montrons qu'on a alors $Q'_k = P_{k+1}$. En effet d'une part on a

$$\overrightarrow{\Omega_z P_{k+1}} = \left(R\cos\frac{2(k+1)\pi}{n}, R\sin\frac{2(k+1)\pi}{n}, -h/2\right)$$

puisque $z = h/2$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega_z Q'_k} &= \left(R\cos(\theta + \tfrac{(2k+1)\pi}{n}), R\sin(\theta + \tfrac{(2k+1)\pi}{n}), z - h\right) \\
&= \left(R\cos\tfrac{2(k+1)\pi}{n}, R\sin\tfrac{2(k+1)\pi}{n}, -h/2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $Q'_k = P_{k+1}$.

4) On suppose désormais que l'anti-rotation f est choisie telle que $f(P_k) = Q_k$ et $f(Q_k) = P_{k+1}$. On note T_k le triangle $P_kQ_kP_{k+1}$ et T'_k le triangle $Q_kP_{k+1}Q_{k+1}$.
i) Montrer que $f(T_k) = T'_k$ et $f(T'_k) = T_{k+1}$.
ii) En déduire que les triangles $T_0, ..., T_{n-1}, T'_0, ..., T'_{n-1}$ sont isométriques [1] entre eux.

Rép.– i) On a $f(P_k) = Q_k$, $f(Q_k) = P_{k+1}$ et $f(P_{k+1}) = Q_{k+1}$ donc $f(T_k) = T'_k$. De même $f(T'_k) = T_{k+1}$.
ii) On a donc $T_k = f^{2k}(T_0)$ et $T'_k = f^{2k+1}(T_0)$ ce qui montre que tous les triangles sont isométriques à T_0.

5) Soit H le plan affine passant par l'origine et de direction $\overrightarrow{H} = Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3)$. On note s_H la réflexion affine par rapport à H.
i) Montrer que si $M = O + X\overrightarrow{e}_1 + Y\overrightarrow{e}_2 + Z\overrightarrow{e}_3$ alors

$$s_H(M) = O + X\overrightarrow{e}_1 - Y\overrightarrow{e}_2 + Z\overrightarrow{e}_3.$$

ii) Quels sont les images des points Q_0, P_0 et Q_{n-1} par s_H ?
iii) Montrer que tous les triangles $T_0, ..., T_{n-1}, T'_0, ..., T'_{n-1}$ sont isocèles.

Rép.– i) On a $s_H(O) = O$ car $O \in H$. D'après la formule de Grassmann, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{H}}(\overrightarrow{OM})$$

pour tout $M \in E$. Supposons $\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{e}_1 + Y\overrightarrow{e}_2 + Z\overrightarrow{e}_3$ alors

$$\overrightarrow{OM'} = X\overrightarrow{e}_1 - Y\overrightarrow{e}_2 + Z\overrightarrow{e}_3.$$

ii) Puisque $P_0 = O + R\overrightarrow{e}_1$, on a $s_H(P_0) = P_0$. De $Q_0 = (R\cos\frac{\pi}{n}, R\sin\frac{\pi}{n}, h)$ on déduit

$$\begin{aligned}
s_H(Q_0) &= (R\cos\frac{\pi}{n}, -R\sin\frac{\pi}{n}, h) \\
&= (R\cos\frac{\pi}{n}, R\sin-\frac{\pi}{n}, h) \\
&= (R\cos(2\pi - \frac{\pi}{n}), R\sin(2\pi - \frac{\pi}{n}), h) \\
&= (R\cos(\frac{(2(n-1)+1)\pi}{n}), R\sin(\frac{(2(n-1)+1)\pi}{n}), h) \\
&= Q_{n-1}.
\end{aligned}$$

1. On rappelle que deux triangles sont *isométriques* s'il existe une isométrie qui envoie l'un sur l'autre.

Puisque s_H est une involution, on a $s_H^{-1} = s_H$ et donc $s_H(Q_{n-1}) = Q_0$.
iii) Ainsi $s_H([P_0 Q_0]) = [P_0, Q_{n-1}]$ et comme s_H est une isométrie, on en déduit que T'_0 est isocèle, puis que tous les autres triangles le sont puisque isométriques entre eux.

6) Soit I_k le point milieu du segment $[P_k P_{k+1}]$.
i) Montrer que

$$\overrightarrow{OI}_k = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_k + \overrightarrow{OP}_{k+1})$$

ii) Déterminer les coordonnées de I_k dans le repère $\mathcal{R}$.
iii) Montrer que $Q_k I_k = \sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + h^2}$.

Rép.– i) Le point I_k est milieu de $[P_k P_{k+1}]$ si $\overrightarrow{I_k P_k} = -\overrightarrow{I_k P_{k+1}}$. On en déduit

$$\overrightarrow{I_k O} + \overrightarrow{OP_k} = -\overrightarrow{I_k O} - \overrightarrow{OP_{k+1}}$$

i. e.

$$\overrightarrow{OI}_k = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_k + \overrightarrow{OP}_{k+1}).$$

ii) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI}_k &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_k + \overrightarrow{OP}_{k+1}) \\
&= \frac{1}{2}(R(\cos\frac{2(k+1)\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n}), R\sin\frac{2(k+1)\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}, 0) \\
&= (R\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}, R\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}, 0)
\end{aligned}$$

d'où les coordonnées de I_k dans le repère $\mathcal{R}$:

$$I_k = (R\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}, R\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}, 0).$$

iii) On a

$$\overrightarrow{I_k Q_k} = (R\cos\tfrac{(2k+1)\pi}{n}(1-\cos\tfrac{\pi}{n}), R\sin\tfrac{(2k+1)\pi}{n}(1-\cos\tfrac{\pi}{n}), h)$$

d'où

$$\|I_k Q_k\|^2 = R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + h^2 = R^2(2\sin^2\frac{\pi}{2n})^2 + h^2$$

7) i) En considérant le triangle isocèle $OP_k P_{k+1}$, déterminer la longueur $P_k P_{k+1}$ en fonction de n et de R.
ii) Montrer que

$$Aire(T_k) = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + h^2}$$

Rép.– i) Le triangle OP_kP_{k+1} étant isocèle, la longueur de sa base $[P_kP_{k+1}]$ est donnée par $2R\sin\frac{\alpha}{2}$ où $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ est l'angle au sommet O. On a donc $P_kP_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.
ii) Puisque T_k est isocèle, $[I_kQ_k]$ est la hauteur issue de Q_k. On a donc

$$Aire(T_k) = \frac{1}{2}Base \times Hauteur = \frac{1}{2}P_kP_{k+1}.I_kQ_k$$

Il suffit ensuite de remplacer par les valeurs déjà obtenues.

8) Soit t la translation de vecteur $2h\overrightarrow{e}_3$. On note $P_{k,1} = t(P_k)$ et T_k'' (resp. T_k''') le triangle $Q_{k-1}P_{k,1}Q_k$ (resp $P_{k,1}Q_kP_{k+1,1}$). Montrer que les triangles T_k'' et T_k''' sont isométriques au triangle T_0.

Rép.– Soit s la réflexion s_{Π_z} avec $z = h$. Il est immédiat de constater que $s(P_k) = P_{k,1}$ ainsi $s(T_k) = T_k'''$ et $s(T_k') = T_k''$. Comme T_k et T_k' sont isométriques à T_0, il s'en suit que T_k'' et T_k''' sont isométriques au triangle T_0.

9) On choisit désormais $h = \frac{1}{2N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in \{0, ..., N-1\}$ on note t^j la translation de vecteur $2jh\overrightarrow{e}_3$ et on pose

$$T_{k,j} = t^j(T_k), \quad T_{k,j}' = t^j(T_k'), \quad T_{k,j}'' = t^j(T_k''), \quad T_{k,j}''' = t^j(T_k''')$$

(en particulier $T_{k,0} = T_k$, $T_{k,0}' = T_k'$, etc.) On appelle *lampion de Schwarz* $\mathcal{L}$ la réunion de tous les triangles

$$\mathcal{L} = \bigcup_{k\in\{0,...,n-1\},\, j\in\{0,...,N-1\}} (T_{k,j} \cup T_{k,j}' \cup T_{k,j}'' \cup T_{k,j}''').$$

i) Déterminer l'aire $A(n, N)$ de $\mathcal{L}$ en fonction de N et de n.
ii) Déterminer $\lim_{n\longrightarrow\infty} A(n, n)$ et comparer avec l'aire du cylindre de hauteur 1.
iii) Que vaut $\lim_{n\longrightarrow\infty} A(n, n^3)$?

Rép.– i) Les triangles sont tous isométriques donc

$$Aire(\mathcal{L}) = 4nNAire(T_0) = 4nNR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + \frac{1}{4N^2}}$$

ii) On a d'une part

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} 4nR\sin\frac{\pi}{n} = 4\pi R.$$

D'autre part, puisque $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, on a $R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 \sim \left[\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right]^2 = \frac{R^2\pi^4}{4n^4}$ et $\frac{1}{4N^2} = \frac{1}{4n^2}$, on a également

$$\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + \frac{1}{N^2}} \sim \frac{1}{2n}$$

et

$$N\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2+\frac{1}{N^2}}\sim 1$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A(n,n)=2\pi R$$

ce qui est l'aire d'un cylindre dont la base est un cercle de rayon R et dont la hauteur est 1.
iii) Cette fois on a $\frac{1}{4N^2}\sim\frac{1}{4n^6}$ et donc

$$\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2+\frac{1}{N^2}}\sim\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

d'où

$$N\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2+\frac{1}{N^2}}\sim n\frac{R\pi^2}{2}$$

et

$$Aire(\mathcal{L})\sim n4\pi R^2\frac{\pi^2}{2}$$

donc $\lim_{n\longrightarrow\infty} A(n,n^3)=\infty$.

FORMULAIRE.–

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a\\
\cos a-\cos b &= -2\sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}\\
\cos a+\cos b &= 2\cos\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}\\
\sin a-\sin b &= 2\cos\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}\\
\sin a+\sin b &= 2\cos\tfrac{a-b}{2}\sin\tfrac{a+b}{2}
\end{aligned}$$