Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 29 novembre 2018 – durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z}$. Montrer que f est une isométrie et déterminer $Fix\ f$.

2.– Soit $\overrightarrow{P}$ un plan orienté, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ une base orthonormée directe et $\overrightarrow{f} \in SO(\overrightarrow{P})$. Montrer que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

3.– Soient $\mathcal{C}$ un cercle du plan P de centre Ω et de rayon R, et A un point de P. La *puissance* $P_{\mathcal{C}}(A)$ *de* A *par rapport à* $\mathcal{C}$ est le nombre $A\Omega^2 - R^2$. Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.

4.– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier inscrit dans le cube $[0,1]^3$. Précisément $A = (1,1,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (0,1,1)$ et $D = (0,0,0)$. Montrer que la hauteur du tétraèdre issue de D est la grande diagonale du cube (DD') où $D' = (1,1,1)$.

5.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Le problème. – (10 pts) Le but de ce problème est de déterminer le groupe d'isométrie de certaines figures géométriques.

Question préliminaire.– Soient θ_1, θ_2 deux nombres réels. Montrer que

$$e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

Partie 1.– Soient $p \geq 1$ un entier et $\{(A_0, \lambda_0), ..., (A_p, \lambda_p)\}$ un système de $p+1$ points pondérés du plan tel que $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k = 1$. Le barycentre $G = bar\{(A_0, \lambda_0), ..., (A_p, \lambda_p)\}$ d'un tel système est le point G défini par :

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \overrightarrow{GA}_k = \overrightarrow{0}.$$

Si $\lambda_0 = ... = \lambda_p = \frac{1}{p+1}$, on dit que G est l'isobarycentre des points $A_0, ..., A_p$.

1) Soit f une application affine du plan. Montrer que f conserve le barycentre c'est-à-dire :

$$G = bar\{(A_0, \lambda_0), ..., (A_p, \lambda_p)\} \implies f(G) = bar\{(f(A_0), \lambda_0), ..., (f(A_p), \lambda_p)\}.$$

pour tout système de points pondérés $\{(A_0, \lambda_0), ..., (A_p, \lambda_p)\}$.

2) On identifie le plan affine à $\mathbb{C}$ et on note $(a_0, ..., a_p) \in \mathbb{C}^p$ les affixes de $(A_0, ..., A_p)$. Montrer que l'affixe g de G vaut

$$g = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k a_k.$$

3) Soit $a = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ avec $\rho > 0$. On considère les points A_0, A_1 et A_2 dont les affixes respectives sont a, ja et $j^2 a$ où j désigne le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$.

i) Calculer les distances A_0A_1, A_0A_2 et A_1A_2 en fonction du module $|a|$. En déduire la nature du triangle formé par les trois points A_0, A_1 et A_2.

ii) Montrer que les points A_0, A_1 et A_2 sont affinement indépendants.

iii) On note O l'origine (le point d'affixe 0) et I le point d'affixe 1. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_k}})$.

iv) Déterminer l'isobarycentre de A_0, A_1 et A_2.

v) On note $Is(A_0, A_1, A_2)$ le groupe des isométries du plan qui conservent $\{A_0, A_1, A_2\}$. Montrer que tout élément $f \in Is(A_0, A_1, A_2)$ fixe l'origine.

vi) Soit $\Sigma(A_0, A_1, A_2)$ le groupe des permutations des trois points A_0, A_1, A_2 et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} Is(A_0, A_1, A_2) & \longrightarrow & \Sigma(A_0, A_1, A_2) \\ f & \longmapsto & f_{|\{A_0, A_1, A_2\}} \end{array}$$

la restriction de f à ces trois points. Montrer que Φ est injective et en déduire que le cardinal de $Is(A_0, A_1, A_2)$ est au plus 6.

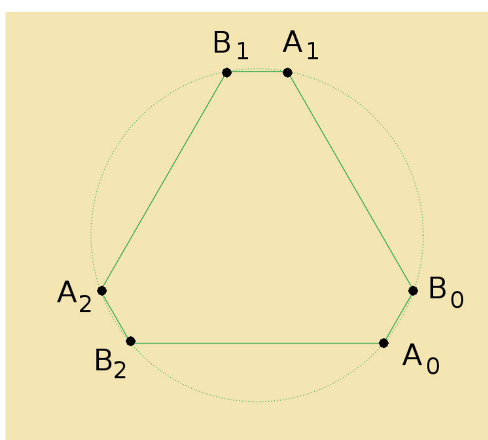
vii) Écrire sous forme complexe l'isométrie s de $Is(A_0, A_1, A_2)$ qui fixe A_0 et qui permute A_1 et A_2.

viii) Montrer que Φ est surjective en décrivant six isométries planes conservant $\{A_0, A_1, A_2\}$.

Partie 2.– Soient $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[$, $a = e^{-i(\alpha/2+\pi/6)}$ et $b = e^{i(\alpha/2-\pi/6)}$. On note A_0, A_1, A_2 (resp. B_0, B_1, B_2) les points d'affixe

$$a_k = j^k a \quad (\text{resp.} \quad b_k = j^k b)$$

avec $k \in \{0, 1, 2\}$. On note $H_\alpha = A_0B_0A_1B_1A_2B_2$ l'hexagone constitué par l'union des six segments $[A_k, B_k]$ et $[B_k, A_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, 2\}$. On convient d'une convention circulaire des indices : $A_3 = A_0$ et $B_3 = B_0$. Le but de cette partie est déterminer le groupe G des isométries du plan qui préservent l'hexagone H_α.



L'hexagone H_α

1) i) Montrer que O (le point d'affixe 0) est l'isobarycentre des points A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2.

ii) Énoncer le théorème de classification des isométries planes.

iii) On admet [1] que si $g \in G$ alors g fixe O. Déduire du théorème de classification des isométries planes que g est soit l'identité, soit une rotation ou une réflexion par rapport à une droite.

2) Soit $t \in [0,1]$ et θ_1, θ_2 deux nombres réels tels que $\theta_1 \not\equiv \theta_2 \mod 2\pi$.

i) Montrer que

$$|te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}|^2 = 1 + 2t(1-t)(\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1).$$

ii) En déduire que $|te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}| \leq 1$ avec égalité si et seulement si $t = 0$ ou $t = 1$.

3) On considère l'application *distance à l'origine* :

$$\begin{array}{rccc} d: & H_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & Z & \longmapsto & d(Z) = dist(Z, O). \end{array}$$

i) Montrer que $d(Z) \leq 1$ avec l'égalité si et seulement si le point Z est l'un des six sommets de H_α.

Indication.– On rappelle que si Z est sur un segment $[S_1, S_2]$ alors il existe $0 \leq t \leq 1$ tel que l'affixe z de Z vérifie $z = te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}$ où $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont les affixes des sommets S_1 et S_2.

ii) Déduire de la question 2) que l'image d'un sommet de H_α par g est un sommet de H_α.

4) i) Montrer que toutes les distances $dist(A_k, B_k)$ avec $k \in \{0,1,2\}$ sont égales. Montrer qu'il en est de même pour les distances $dist(B_k, A_{k+1})$, $k \in \{0,1,2\}$.

ii) On note $d_1 = dist(A_0, B_0)$ et $d_2 = dist(B_2, A_0)$. Montrer que $d_1 \neq d_2$.

iii) En déduire que l'image par g des deux points A_0, B_0 est soit $\{A_0, B_0\}$, soit $\{A_1, B_1\}$, soit $\{A_2, B_2\}$.

5) Déduire du 4) que le cardinal de G est au plus 6.

1. Ceci ne découle pas de la question 1) de la première partie car H_α est composé d'une infinité de points : les six sommets et les six arêtes.

6) i) Écrire l'expression sous forme complexe de la rotation r qui envoie A_0 sur A_1 et montrer qu'elle préserve H_α.

ii) Soit σ la reflexion $\sigma(z) = e^{-i\pi/3}\overline{z}$. Montrer qu'elle préserve H_α.

iii) Décrire tous les éléments de G.