Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé de l'examen du jeudi 28 novembre 2019

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

Rép.– Notons que A est fixe par g puisque $s_H(A') = A$.
Soit $M \in F$ alors $A'M' = AM$ car f est une isométrie et $A'M = AM$ car M est fixe. Donc M est dans l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, i. e. $M \in H$. Mais alors $g(M) = M$ et $M \in Fix\ g$.

2.– Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$ est stable par une application orthogonale $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ alors $\overrightarrow{F}^{\perp}$ est également stable par $\overrightarrow{f}$.

Rép.– Soit $y \in \overrightarrow{F}^{\perp}$, il faut montrer que $\overrightarrow{f}(y) \in \overrightarrow{F}^{\perp}$. Par définition

$$y \in \overrightarrow{F}^{\perp} \iff \forall x \in \overrightarrow{F}\ :\ \langle x, y\rangle = 0.$$

Puisque $\overrightarrow{F}$ est stable $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) \subset \overrightarrow{F})$ et comme $\overrightarrow{f}$ est une application orthogonale, elle est bijective et on a en fait $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}$. Ainsi

$$\begin{aligned} y \in \overrightarrow{F}^{\perp} &\iff \forall x \in \overrightarrow{F}\ :\ \langle y, \overrightarrow{f}^{-1}(x)\rangle = 0 \\ &\iff \forall x \in \overrightarrow{F}\ :\ \langle \overrightarrow{f}(y), x\rangle = 0 \\ &\iff \overrightarrow{f}(y) \in \overrightarrow{F}^{\perp}. \end{aligned}$$

3.– Énoncer le théorème de classification des isométries de l'espace.

Rép.– Tout déplacement de l'espace est soit l'identité, soit une rotation, soit une translation, soit un vissage. Tout anti-déplacement de l'espace est soit une réflexion, soit une symétrie glissée, soit une anti-rotation.

4.– Montrer que tout similitude du plan de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe.

Rép.– Soit f une similitude du plan P et O un point de P. Un point M est fixe par f si et seulement si

$$\begin{aligned} M = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{Of(O)} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O} \end{aligned}$$

L'application $(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$ est inversible car son noyau est trivial. En effet, si $\overrightarrow{u} \in \ker \overrightarrow{f}$ alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et donc $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$. Or il est immédiat de vérifier que $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle, i. e. $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\| = k\|\overrightarrow{u}\|$. Comme $k \neq 1$, il faut donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. L'équation des points fixes de f a donc une unique solution M donnée par

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O})$$

ou encore

$$M = O + (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}).$$

5.– i) Soient $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ une application orthogonale dont une matrice dans une base orthonormée est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

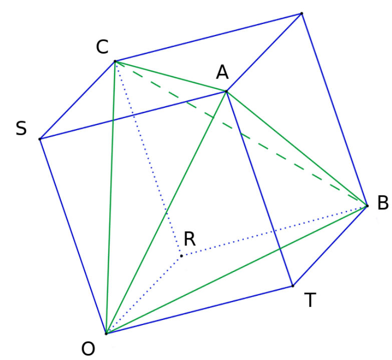
Calculer les valeurs propres de $\overrightarrow{f}$ et en déduire la nature de l'application $\overrightarrow{f}$.
ii) Donner la nature des deux matrices suivantes (on ne demande pas de justifier) :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.

Rép.– i) Le calcul du polynôme caractéristique donne $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Les valeurs propres sont 1 et -1 donc $\overrightarrow{f}$ est une réflexion.
ii) A est un retournement (rotation d'angle π) et B est une antirotation.

Le problème. – (10 pts) On considère $E = (\mathbb{R}^3, \langle ., . \rangle)$ l'espace affine euclidien, $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel associé et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ un repère orthonormée de E. Un point M étant donné, on note (x_M, y_M, z_M) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.



Le but de ce problème est d'établir que les affixes a, b et c des projetés des sommets d'un tétraèdre régulier $OABC$ sur le plan P d'équation $z = 0$ (le plan horizontal passant par O) satisfont à la relation

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0.$$

1) Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ une application orthogonale c'est-à-dire telle que

$$\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_2}) \rangle = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$$

pour tout $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ dans $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}$.

i) Montrer que $\ker \overrightarrow{f} = \{\overrightarrow{0}\}$ et en déduire que $\overrightarrow{f}$ est inversible.

ii) Montrer que $(\overrightarrow{f})^{-1}$ est orthogonale.

iii) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$. Montrer que $AA^t = A^tA = Id$.

iv) En déduire que la matrice de $(\overrightarrow{f})^{-1}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ est la transposée A^t de A.

v) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $\overrightarrow{a}_i$ le "vecteur ligne"

$$\overrightarrow{a}_i = a_{i1}\overrightarrow{e}_1 + a_{i2}\overrightarrow{e}_2 + a_{i3}\overrightarrow{e}_3$$

Montrer que $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$.

Rép.– i) Soit $\overrightarrow{u_1} \in \ker \overrightarrow{f}$. Alors

$$\|\overrightarrow{u_1}\|^2 = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}) \rangle = \langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{0} \rangle = 0$$

donc $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0}$. Ainsi $\overrightarrow{f}$ est injective. Le théorème de la dimension permet de conclure que $\overrightarrow{f}$ est bijective.
ii) On a

$$\langle (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{u_1}), (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{u_2}) \rangle = \langle \overrightarrow{f}\left((\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{u_1})\right), \overrightarrow{f}\left((\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{u_2})\right) \rangle = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$$

ainsi $(\overrightarrow{f})^{-1}$ est orthogonale.
iii) Soit U_1 (resp. U_2) la matrice colonne du vecteur $\overrightarrow{u}_1$ (resp. $\overrightarrow{u}_2$). La condition d'orthogonalité

$$\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_2}) \rangle = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$$

s'écrit matriciellement

$$(AU_1)^t.(AU_2) = U_1^t.U_2$$

i. e.

$$U_1^t(A^t.A)U_2 = U_1^t.U_2.$$

Soit (b_{ij}) les coefficients de la matrice produit $B = A^t.A$. Si l'on choisit pour U_1 (resp. U_2) le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le i-ème (resp. sauf le j-ème) alors $U_1^t(A^t.A)U_2 = b_{ij}$ et $U_1^t.U_2 = \delta_{ij}$. Ceci montre que $B = Id$. En utilisant la symétrie du produit scalaire, on montre avec les mêmes arguments que $A.A^t = Id$.
iv) La relation $AA^t = A^tA = Id$ montre directement que A^t est la matrice de $(\overrightarrow{f})^{-1}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$.
v) Puisque la matrice de $(\overrightarrow{f})^{-1}$ est la transposée A^t, le vecteur ligne $\overrightarrow{a}_i$ n'est rien d'autre que l'image $(\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{e}_i)$. Ainsi $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$.

2) Soient R, S et T trois points de E tels que les vecteurs $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ soient de même norme (non nécessairement égale à 1) et soient orthogonaux deux à deux. Montrer que

$$x_R^2 + x_S^2 + x_T^2 = y_R^2 + y_S^2 + y_T^2 = z_R^2 + z_S^2 + z_T^2$$

$$x_R y_R + x_S y_S + x_T y_T = x_R z_R + x_S z_S + x_T z_T = y_R z_R + y_S z_S + y_T z_T = 0.$$

Rép.– Notons ℓ la norme commune de $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$. Ainsi, $(\frac{1}{\ell}\overrightarrow{OR}, \frac{1}{\ell}\overrightarrow{OS}, \frac{1}{\ell}\overrightarrow{OT})$ est une base orthonormée et la matrice M de l'application orthogonale envoyant $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ sur cette base s'écrit

$$M = \frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} x_R & x_S & x_T \\ y_R & y_S & y_T \\ z_R & z_S & z_T \end{pmatrix}.$$

La transposée M^t de cette matrice est encore orthogonale

$$M^t = \frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} x_R & y_R & z_R \\ x_S & y_S & z_S \\ x_T & y_T & z_T \end{pmatrix}.$$

ainsi

$$x_R^2 + x_S^2 + x_T^2 = y_R^2 + y_S^2 + y_T^2 = z_R^2 + z_S^2 + z_T^2 = \ell^2$$

et

$$x_R y_R + x_S y_S + x_T y_T = x_R z_R + x_S z_S + x_T z_T = y_R z_R + y_S z_S + y_T z_T = 0.$$

3) On identifie le plan P au plan complexe. On note R', S' et T' les images par la projection orthogonale π sur P des points R, S et T. Montrer que si r, s et t sont les affixes de R', S' et T' alors on a

$$r^2 + s^2 + t^2 = 0.$$

Rép.– Notons que $R' = (x_R, y_R, 0)$, $S' = (x_S, y_S, 0)$ et $T' = (x_T, y_T, 0)$. Ainsi $r = x_R + iy_R$, $s = x_S + iy_S$ et $t = x_T + iy_T$. D'où

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 + t^2 &= (x_R + iy_R)^2 + (x_S + iy_S)^2 + (x_T + iy_T)^2 \\ &= (x_R^2 + x_S^2 + x_T^2) - (y_R^2 + y_S^2 + y_T^2) + 2i(x_R y_R + x_S y_S + x_T y_T) \end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$x_R^2 + x_S^2 + x_T^2 = y_R^2 + y_S^2 + y_T^2 \quad \text{et} \quad x_R y_R + x_S y_S + x_T y_T = 0.$$

On en déduit $r^2 + s^2 + t^2 = 0$.

4) Réciproquement, soient R', S' et T' trois points de P d'affixes r, s et t tels que $r^2 + s^2 + t^2 = 0$.

i) Montrer que les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = x_R \overrightarrow{e}_1 + x_S \overrightarrow{e}_2 + x_T \overrightarrow{e}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = y_R \overrightarrow{e}_1 + y_S \overrightarrow{e}_2 + y_T \overrightarrow{e}_3$$

sont de même norme et orthogonaux.

ii) À tout vecteur $\overrightarrow{w} = z_1 \overrightarrow{e}_1 + z_2 \overrightarrow{e}_2 + z_3 \overrightarrow{e}_3$ de $\overrightarrow{E}$ on associe les trois points suivants

$$R'' = R' + z_1 \overrightarrow{e}_3, \quad S'' = S' + z_2 \overrightarrow{e}_3, \quad T'' = T' + z_3 \overrightarrow{e}_3$$

Montrer que $\overrightarrow{OR''}, \overrightarrow{OS''}$ et $\overrightarrow{OT''}$ sont de même norme et orthogonaux deux à deux si et seulement s'il en est de même pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

iii) Montrer qu'il existe des points R, S et T dans E tels que $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ soient de même norme et orthogonaux deux à deux et tels que

$$\pi(R) = R', \quad \pi(S) = S' \quad \text{et} \quad \pi(T) = T'$$

iv) Les points R, S et T sont-ils uniques ?

Rép.– i) D'après la question précédente

$$r^2 + s^2 + t^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2i\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle.$$

Ainsi $r^2 + s^2 + t^2 = 0$ si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont de même norme et orthogonaux.
ii) Notons

$$A = Mat(\overrightarrow{OR''}, \overrightarrow{OS''}, \overrightarrow{OT''}) = \begin{pmatrix} x_R & x_S & x_T \\ y_R & y_S & y_T \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

et

$$B = Mat(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} x_R & y_R & z_1 \\ x_S & y_S & z_2 \\ x_T & y_T & z_3 \end{pmatrix}$$

On a clairement $B^t = A$. Si $\overrightarrow{OR''}, \overrightarrow{OS''}$ et $\overrightarrow{OT''}$ sont de même norme et orthogonaux deux à deux, alors $\frac{1}{\ell}A$, où ℓ est la norme commune, est une matrice orthogonale. Il est donc de même de $\frac{1}{\ell}B$ ce qui signifie que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont de même norme et orthogonaux deux à deux. La réciproque se traite similairement.
iii) Soit $\overrightarrow{w} \in Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^\perp$ tel que $\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\|$. Ainsi, les vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont de même norme et orthogonaux deux à deux. Pour un tel $\overrightarrow{w}$, et d'après la question précédente, les points R'', S'' et T'' conviennent.
iv) Non, les points R, S et T ne sont pas uniques. Il y a exactement deux choix possibles pour $\overrightarrow{w}$ conduisant à deux triplets de points (R, S, T) différents.

5) Un exemple numérique.– Soient $r = 3 + 2i$ et $s = 6 - 3i$.

i) Montrer qu'il existe exactement deux nombres complexes t_1 et t_2, que l'on déterminera, vérifiant $r^2 + s^2 + t^2 = 0$.

ii) Trouver tous les triplets de points (R, S, T) tels que l'affixe de leurs projections soient r, s, t_1 ou r, s, t_2 et tels que $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ soient de même norme et orthogonaux deux à deux.

Rép.– i) On a $r^2 + s^2 = (3+2i)^2 + (6-3i)^2 = 32 - 24i$. Ainsi $t^2 = -32 + 24i$. On trouve facilement les deux racines $t_1 = 2 + 6i$ et $t_2 = -2 - 6i$.

ii) Si on choisit t_1, on a $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e}_1 + 6\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e}_1 - 3\overrightarrow{e}_2 + 6\overrightarrow{e}_3$. Un vecteur normal au plan $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donné par

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 7(3\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2 - 3\overrightarrow{e}_3)$$

dont la norme est $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = 7\|\overrightarrow{u}\|$. D'où deux choix possible :

$$\overrightarrow{w} = \pm(3\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2 - 3\overrightarrow{e}_3)$$

conduisant à deux triplets (R, S, T) donnés par

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si on choisit t_2, on obtient deux autres triplets

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6) Soit $OABC$ un tétraèdre quelconque. On définit trois points R, S et T en posant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ \overrightarrow{OS} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{OT} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

i) Montrer que $\|\overrightarrow{OR}\|^2 - \|\overrightarrow{OS}\|^2 = \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB} \rangle$.

ii) Montrer que $\langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS} \rangle = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{OC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2)$.

Rép.– i) On écrit $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB})$ et $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB})$ d'où

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OR}\|^2 - \|\overrightarrow{OS}\|^2 &= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{OC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB} \rangle\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{OC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB} \rangle\right) \\ &= \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB} \rangle \end{aligned}$$

ii) On a aussi

$$\langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS} \rangle = \frac{1}{4}\langle \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{OC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2).$$

7) Une application affine $f : E \to E$ est une similitude de rapport $k > 0$ si pour tout $(M, N) \in E \times E$, on a $f(M)f(N) = kMN$.

i) Montrer que pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = k\|\overrightarrow{v}\|$.

ii) En écrivant $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ en fonction de $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$ montrer que $\overrightarrow{f}$ préserve l'orthogonalité i. e.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle = 0$$

Rép.– i) Notons que si $N = M + \overrightarrow{v}$ alors $MN = \|\overrightarrow{v}\|$ et $f(M)f(N) = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|$. Ainsi

$$f(M)f(N) = kMN \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = k\|\overrightarrow{v}\|.$$

ii) On a

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} 2\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle &= \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2 - \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\|^2 - \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\|^2 - \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\|^2 - \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2 \\ &= k^2\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - k^2\|\overrightarrow{u}\|^2 - k^2\|\overrightarrow{v}\|^2 \\ &= 2k^2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ alors $\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle = 0$.

8) Soit $A_0 = (1,0,1)$, $B_0 = (1,1,0)$ et $C_0 = (0,1,1)$. On dit qu'un tétraèdre est régulier s'il est l'image du tétraèdre $OA_0B_0C_0$ par une similitude.

i) Montrer que si $OABC$ est un tétraèdre régulier alors toutes les arêtes ont même longueur.

ii) Montrer que si $OABC$ est un tétraèdre régulier alors et $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

iii) Décrire une isométrie du tétraèdre envoyant l'arête $[OC]$ sur $[OB]$ et l'arête $[AB]$ sur $[AC]$.

iv) Soient R, S et T définis comme dans la question 6. Montrer que si $(OABC)$ est un tétraèdre régulier alors $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont deux à deux orthogonaux et ont même norme.

Rép.– i) Une similitude préservant le rapport des longueurs, il suffit de le vérifier pour le tétraèdre $(OA_0B_0C_0)$. Un simple calcul montre que $OA_0 = OB_0 = OC_0 = A_0B_0 = B_0C_0 = C_0A_0 = \sqrt{2}$.
ii) D'après la question précédente, une similitude préserve l'orthogonalité. Il suffit donc de vérifier la propriété sur le tétraèdre $OA_0B_0C_0$. On a $\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3$ et $\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3$ d'où $\langle \overrightarrow{OC_0}, \overrightarrow{A_0B_0} \rangle = 0$.
iii) Il y a deux possibilités :

$$O \longmapsto O, \quad C \longmapsto B, \quad A \longmapsto A, \quad B \longmapsto C$$

ou

$$O \longmapsto O, \quad C \longmapsto B, \quad A \longmapsto C, \quad B \longmapsto 1.$$

Le premier cas correspond à une réflexion selon le plan médiateur de l'arête $[BC]$, le second à une rotation autour de la grande diagonale issue de O (du cube portant $OABC$) et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ selon l'orientation choisie.
iv) D'après la question 6 ii) et le i) de cette question, on a

$$\langle\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}\rangle = 0, \quad \langle\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OT}\rangle = 0, \quad \langle\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OR}\rangle = 0.$$

On a aussi d'après la question 6 i) et le ii) de cette question

$$\|\overrightarrow{OR}\|^2 - \|\overrightarrow{OS}\|^2 = \langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}\rangle = 0.$$

On a également, pour la raison de symétrie mise en évidence en iii)

$$\|\overrightarrow{OT}\|^2 - \|\overrightarrow{OR}\|^2 = \langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA}\rangle = 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont deux à deux orthogonaux et ont même norme.

9) On note a, b et c les affixes des projetés $\pi(A)$, $\pi(B)$ et $\pi(C)$. Montrer que

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0.$$

Rép.– Notons r, s et t les affixes des projetés $\pi(R)$, $\pi(S)$ et $\pi(T)$. D'après la définition donnée à la question 6, on a

$$r = \frac{1}{2}(b + c - a), \quad s = \frac{1}{2}(c + a - b), \quad t = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Puisque $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont deux à deux orthogonaux et ont même norme, d'après la question 3 on a

$$r^2 + s^2 + t^2 = 0.$$

Il suffit ensuite de remplacer

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 + t^2 &= \frac{1}{4}(b + c - a)^2 + \frac{1}{4}(c + a - b)^2 + \frac{1}{4}(a + b - c)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)\right). \end{aligned}$$