Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie - Option Mathématiques

Examen du 14 novembre 2016 - Durée 2h

Les documents, les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

2.– Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

3.– Écrire le paramétrage colatitude-longitude de la sphère unité épointée des pôles Nord et Sud. Montrer qu'il est régulier.

4.– Soit $\beta = \gamma \circ \varphi$ un C^k-reparamétrage ($k \geq 1$) de $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Montrer que $Long(\gamma) = Long(\beta)$.

5.– Soit la famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ données par $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où les fonctions $a, b, c \in C^1(I)$ sont telles que

$$\forall t \in I, \quad (a(t), b(t)) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0.$$

Montrer que la courbe enveloppe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (x(t), y(t))$ est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

Le problème. – (10 pts) Soit $n \geq 1$ et $P_0, P_1, \ldots P_n$, $n+1$ points de l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$. On appelle courbe de Bézier de degré n et de points de contrôle $P_0, ..., P_n$, la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} C: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i \end{array}$$

où les $B_{n,i}(t) := \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$ sont les polynômes de Bernstein [1]. Le but de ce problème est d'étudier les propriétés des courbes de Bézier rationnelles.

1) i) On suppose $n = 1$ et $P_0 \neq P_1$. Montrer que le support de C est un segment dont on déterminera les extrémités.
ii) On suppose $n = 2$ et P_0, P_1, P_2 affinement indépendants. Montrer que le support de C est un arc de parabole dont on déterminera le plan osculateur et les extrémités.

2) i) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) = 1$.
ii) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, le point $C(t)$ est dans l'enveloppe convexe [2] des points de contrôle.

Pour tout $t \in [0,1]$, on définit une famille de points $(P_{j,i}(t))_{(i,j) \in K}$ où $K = \{(i,j) \mid j \in \{0, ..., n\}, i \in \{0, ..., n-j\}\}$ par

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad P_{0,i}(t) := P_i$$

$$\forall j \in \{1, ..., n\},\ \forall i \in \{0, ..., n-j\}, \quad P_{j,i}(t) = (1-t) P_{j-1,i}(t) + t P_{j-1,i+1}(t)$$

3) On suppose $n = 3$, $t = 1/2$ et

$$P_0 = (-1, 1, 0),\ P_1 = (-1, 0, 0),\ P_2 = (1, 0, 0),\ P_3 = (1, 1, 0).$$

i) Faire un dessin dans le plan (Oxy) faisant apparaître tous les segments $[P_{j,i}(1/2), P_{j,i+1}(1/2)]$ avec $j \in \{0,1,2\}$ et $i \in \{0, ..., 2-j\}$, ainsi que le point $P_{3,0}(1/2)$.
ii) Calculer $C(1/2)$. Que remarque-t-on ?

1. Avec la convention $B_{0,0}(t) = 1$.
2. On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset \mathbb{R}^3$ est l'ensemble des barycentres (à coefficients positifs ou nuls) des familles de points de A

4) i) Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$B_{n,i}(t) = (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t)$$

ii) Soit $j \in \{1, ..., n\}$, en utilisant la relation du i) montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t).$$

iii) Montrer que pour tout $j \in \{0, ..., n\}$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t)$$

iv) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1], \quad C(t) = P_{n,0}(t).$$

5) Montrer que

$$\forall t \in [0,1] \quad B'_{n,i}(t) = \begin{cases} -nB_{n-1,0}(t) & \text{si } i = 0, \\ n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t)) & \text{si } i \in \{1, ..., n-1\}, \\ nB_{n-1,n-1}(t) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

6) Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$C_1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(t)P_{i+1} \quad \text{et} \quad C_2(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(t)P_i$$

i) Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad C'(t) = n(C_1(t) - C_2(t))$$

ii) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $C_1(t) = P_{n-1,0}(t)$ et $C_2(t) = P_{n-1,1}(t)$ (on pourra remarquer que C_1 et C_2 sont des courbes de Bézier de degré $n-1$).
iii) En déduire que la tangente à la courbe C au point t est la droite $(P_{n-1,0}(t)P_{n-1,1}(t))$.

7) Montrer que quel que soit $n \geq 1$, il n'existe aucun choix de points de contrôle $P_0, ..., P_n$ tel que le support de C soit inclus dans le cercle

$\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ et non réduit à un point (*Indication* : cette question est indépendante des précédentes).

Pour corriger ce défaut, on introduit des poids $\omega_i > 0$, $i = 0, ..., n$ et on définit les *courbes de Bézier rationnelles* par la formule

$$C_R : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \dfrac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t) P_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t)} \end{array}$$

8) i) Reconnaître C_R lorsque $\omega_0 = ... = \omega_n = 1$.
ii) On suppose $n = 1$. Montrer que le support de C_R est le segment $[P_0, P_1]$.
iii) Soient $n = 2$, $P_0 = (0, 1, 0)$, $P_1 = (1, 1, 0)$ et $P_2 = (1, 0, 0)$, $\omega_0 = 2$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Montrer que le support de C_R est un quart du cercle unité $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
iv) On suppose toujours $n = 2$ et $\omega_0 = 2$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Soient $a > b > 0$. Trouver un choix de P_0, P_1 et P_2 tel que le support de C_R soit le quart d'ellipse $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$.