

M1 MEEF – Géométrie – Option Mathématiques

Corrigé de l'examen du 14 novembre 2016

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O . Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Rép.– Dans le triangle MAO on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Les mêmes considérations dans le triangle MBO conduisent à

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$

En sommant

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad [2\pi].$$

2.– Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

Rép.– Soit M une matrice orthogonale, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre et X un vecteur propre non nul. On a

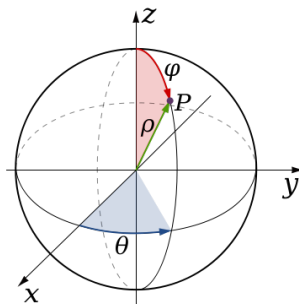
$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\implies {}^t\overline{X}^t M = \overline{\lambda}^t \overline{X} \\ &\implies {}^t\overline{X}^t M M X = \overline{\lambda} \lambda {}^t\overline{X} X \end{aligned}$$

avec ${}^t\overline{M} M = Id$ puisque M est orthogonale. Ainsi $\overline{\lambda} \lambda = 1$

3.— Écrire le paramétrage colatitude-longitude de la sphère unité épointée des pôles Nord et Sud. Montrer qu'il est régulier.

Rép.— Le paramétrage colatitude-longitude est donnée par :

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[\times]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto (\cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\varphi)) \end{aligned}$$



On a

$$\begin{aligned} f_\theta &= (-\sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), 0) \\ f_\varphi &= (\cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \end{aligned}$$

d'où $f_\theta \wedge f_\varphi = -\sin(\varphi)f$ puis $\|f_\theta \wedge f_\varphi\| = |\sin(\varphi)|\|f\| = 1$ et f est régulière puisque $\varphi \in]0, \pi[$.

4.— Soit $\beta = \gamma \circ \varphi$ un C^k -reparamétrage ($k \geq 1$) de $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Montrer que $Long(\gamma) = Long(\beta)$.

Rép.— Il s'agit d'appliquer la formule de changement de variables dans une intégrale. En effet

$$\begin{aligned} Long(\beta) &= \int_J \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \int_J \|\gamma'(\varphi(t))\| \cdot \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \int_I \|\gamma'(u)\| du \\ &= Long(\gamma). \end{aligned}$$

5.— Soit la famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ données par $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où les fonctions $a, b, c \in C^1(I)$ sont telles que

$$\forall t \in I, (a(t), b(t)) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0.$$

Montrer que la courbe enveloppe $t \mapsto (x(t), y(t))$ est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

Rép.— Les conditions

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in D_t \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \in \overrightarrow{D}_t$$

conduisent aux deux équations

$$\begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x'(t) + b'(t)y'(t) = 0 \end{cases}$$

En dérivant la première équation et compte tenu de la seconde, ce système implique le suivant

$$\begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0 \end{cases}$$

dont la résolution fournit les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ de l'énoncé.

Le problème. — (10 pts) Soit $n \geq 1$ et P_0, P_1, \dots, P_n , $n + 1$ points de l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$. On appelle courbe de Bézier de degré n et de points de contrôle P_0, \dots, P_n , la courbe paramétrée

$$C : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) P_i$$

où les $B_{n,i}(t) := \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$ sont les polynômes de Bernstein¹. Le but de ce problème est d'étudier les propriétés des courbes de Bézier rationnelles.

1) i) On suppose $n = 1$ et $P_0 \neq P_1$. Montrer que le support de C est un segment dont on déterminera les extrémités.

ii) On suppose $n = 2$ et P_0, P_1, P_2 affinement indépendants. Montrer que le support de C est un arc de parabole dont on déterminera le plan osculateur et les extrémités.

Rép.— i) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a immédiatement

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

1. Avec la convention $B_{0,0}(t) = 1$.

ainsi $C([0, 1]) = [P_0, P_1]$.

ii) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} C(t) &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \\ &= P_0 + 2t\overrightarrow{P_0 P_1} + t^2(\overrightarrow{P_2 P_1} - \overrightarrow{P_0 P_1}) \end{aligned}$$

Puisque P_0, P_1, P_2 sont affinement indépendants, $\overrightarrow{P_2 P_1}$ et $\overrightarrow{P_0 P_1}$ ne peuvent être colinéaires. Le terme en t^2 n'est donc pas nul et le support de C est un arc de parabole d'extrémité P_0 et P_2 . En particulier la courbe C est une courbe plane, son plan osculateur est le plan qui contient le support, à savoir le plan affine (P_0, P_1, P_2) .

2) i) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on a $\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) = 1$.

ii) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$, le point $C(t)$ est dans l'enveloppe convexe² des points de contrôle.

Rép.– i) La formule du binôme de Newton s'écrit

$$1^n = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)$$

d'où la relation demandée.

ii) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq B_{n,i}(t) \leq 1$ et donc $C(t)$ est le barycentre $\text{bar}((P_i, B_{n,i}(t)), i \in \{0, 1, \dots, n\})$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on définit une famille de points $(P_{j,i}(t))_{(i,j) \in K}$ où $K = \{(i, j) \mid j \in \{0, \dots, n\}, i \in \{0, \dots, n-j\}\}$ par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad P_{0,i}(t) := P_i$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall i \in \{0, \dots, n-j\}, \quad P_{j,i}(t) = (1-t)P_{j-1,i}(t) + tP_{j-1,i+1}(t)$$

3) On suppose $n = 3$, $t = 1/2$ et

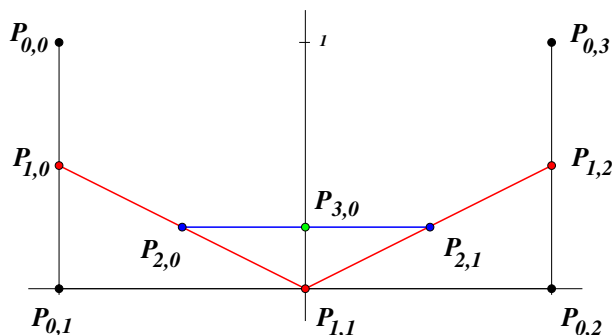
$$P_0 = (-1, 1, 0), \quad P_1 = (-1, 0, 0), \quad P_2 = (1, 0, 0), \quad P_3 = (1, 1, 0).$$

i) Faire un dessin dans le plan (Oxy) faisant apparaître tous les segments $[P_{j,i}(1/2), P_{j,i+1}(1/2)]$ avec $j \in \{0, 1, 2\}$ et $i \in \{0, \dots, 2-j\}$, ainsi que le point $P_{3,0}(1/2)$.

ii) Calculer $C(1/2)$. Que remarque-t-on ?

Rép.– i) Les points $P_{j,i}(1/2)$ se placent comme suit :

2. On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset \mathbb{R}^3$ est l'ensemble des barycentres (à coefficients positifs ou nuls) des familles de points de A



ii) D'une part $B_{n,i}(1/2) = C_n^i 2^{-n}$ donc

$$C(1/2) = 2^{-3}(P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3) = 2^{-3}(0, 2, 0) = (0, 1/4, 0).$$

D'autre part, les calculs menés en i) montrent que $P_{3,0}(1/2) = (0, 1/4, 0)$. On constate ainsi que $C(1/2) = P_{3,0}(1/2)$.

4) i) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et tout $t \in [0, 1]$ on a

$$B_{n,i}(t) = (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t)$$

ii) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$, en utilisant la relation du i) montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t).$$

iii) Montrer que pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$ et tout $t \in [0, 1]$ on a

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t)$$

iv) En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad C(t) = P_{n,0}(t).$$

Rép.— i) Soit $A = (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t)$ on a

$$\begin{aligned} A &= (1-t)C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-1-i} + tC_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \\ &= C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-i} + C_{n-1}^{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) t^i (1-t)^{n-i} \\ &= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \\ &= B_{n,i}(t). \end{aligned}$$

ii) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) &= \sum_{i=0}^{n-j} ((1-t)P_{j-1,i}(t) + tP_{j-1,i+1}(t)) B_{n-j,i}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i}(t)(1-t)B_{n-j,i}(t) + \sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i+1}(t)tB_{n-j,i}(t) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i+1}(t)tB_{n-j,i}(t) &= \sum_{i=1}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)tB_{n-j,i-1}(t) \\ &= P_{j-1,n-j+1}(t)tB_{n-j,n-j}(t) + \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)tB_{n-j,i-1}(t) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i}(t)(1-t)B_{n-j,i}(t) = P_{j-1,0}(t)(1-t)B_{n-j,0}(t) + \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)(1-t)B_{n-j,i}(t)$$

En sommant les deux dernières égalités et en utilisant la relation de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) &= \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t) \\ &\quad + P_{j-1,n-j+1}(t)tB_{n-j,n-j}(t) + P_{j-1,0}(t)(1-t)B_{n-j,0}(t) \end{aligned}$$

Or

$$tB_{n-j,n-j}(t) = t^{n-j+1} = B_{n-j+1,n-j+1}(t)$$

et

$$(1-t)B_{n-j,0}(t) = (1-t)^{n-j+1} = B_{n-j+1,0}(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) &= \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t) \\ &\quad + P_{j-1,n-j+1}(t)B_{n-j+1,n-j+1}(t) + P_{j-1,0}(t)B_{n-j+1,0}(t) \end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t).$$

iii) Notons que si $j = 0$ la formule demandée est la définition de C , elle est donc vraie. On suppose $j \geq 1$. En itérant j fois la relation du ii) on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^n P_{0,i}(t)B_{n,i}(t)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = C(t).$$

iv) Il suffit de prendre $j = n$ dans la relation précédente.

5) Montrer que

$$\forall t \in [0, 1] \quad B'_{n,i}(t) = \begin{cases} -nB_{n-1,0}(t) & \text{si } i = 0, \\ n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t)) & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ nB_{n-1,n-1}(t) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Rép.— i) Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$\begin{aligned} B'_{n,i}(t) &= C_n^i (it^{i-1}(1-t)^{n-i} + (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} t^i(1-t)^{n-i-1} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - n \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i(1-t)^{n-i-1} \\ &= n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t)). \end{aligned}$$

Si $i = 0$ alors $B_{n,0}(t) = (1-t)^n$ et $B'_{n,0}(t) = -n(1-t)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$.

Si $i = n$ alors $B_{n,n}(t) = t^n$ et $B'_{n,n}(t) = nt^{n-1} = nB_{n-1,n-1}(t)$.

6) Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$C_1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(t)P_{i+1} \quad \text{et} \quad C_2(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(t)P_i$$

i) Montrer que

$$\forall t \in [0, 1], \quad C'(t) = n(C_1(t) - C_2(t))$$

ii) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $C_1(t) = P_{n-1,0}(t)$ et $C_2(t) = P_{n-1,1}(t)$ (on pourra remarquer que C_1 et C_2 sont des courbes de Bézier de degré $n-1$).

iii) En déduire que la tangente à la courbe C au point t est la droite $(P_{n-1,0}(t)P_{n-1,1}(t))$.

Rép.– i) En dérivant terme à terme on obtient

$$\begin{aligned}
C'(t) &= \sum_{i=0}^n B'_{n,i}(t)P_i \\
&= -nB_{n-1,0}(t)P_0 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t))P_i \right) + nB_{n-1,n-1}(t)P_n \\
&= -n \sum_{\substack{i=0 \\ n-1}}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_i + n \sum_{\substack{i=1 \\ n-2}}^{n-1} B_{n-1,i-1}(t)P_i + nB_{n-1,n-1}(t)P_n \\
&= -n \sum_{\substack{i=0 \\ n-1}}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_i + n \sum_{\substack{i=0 \\ n-1}}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_{i+1} + nB_{n-1,n-1}(t)P_n \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_i + n \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_{i+1}
\end{aligned}$$

qui est la relation demandée. ii) C_1 est la courbe de Bézier de degré $n - 1$ construite sur les points P_0, \dots, P_{n-1} . D'après le *iii* de la question 4, on a donc $C_1(t) = P_{n-1,0}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Raisonnablement similaire pour C_2 avec les points P_1, \dots, P_{n-1} .

iii) Ainsi $C'(t) = n \overrightarrow{P_{n-1,1}(t)P_{n-1,0}(t)}$. Or $C(t) \in [P_{n-1,1}(t)P_{n-1,0}(t)]$ puisque $C(t) = P_{n,0}(t) = (1-t)P_{n-1,0}(t) + tP_{n-1,1}(t)$. Ainsi $(P_{n-1,0}(t)P_{n-1,1}(t))$ est la droite tangente à C en t .

7) Montrer que quel que soit $n \geq 1$, il n'existe aucun choix de points de contrôle P_0, \dots, P_n tel que le support de C soit inclus dans le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ et non réduit à un point (*Indication* : cette question est indépendante des précédentes).

Rép.– Les fonctions coordonnées (x, y, z) de C sont polynomiales. Notons $x(t) = a_p t^p + \dots + a_0$ et $y(t) = b_q t^q + \dots + b_0$. Quitte à échanger x et y , on peut supposer $p \geq q$. Le terme dominant de $x^2 + y^2$ est donc $a_p^2 t^{2p}$ si $p > q$ ou $(a_p^2 + b_p^2) t^{2p}$ si $p = q$. Pour avoir $x^2 + y^2 = 1$ il faut donc $p = 0$. Mais alors x, y et bien sûr z sont constants et le support de C est un point.

Pour corriger ce défaut, on introduit des poids $\omega_i > 0$, $i = 0, \dots, n$ et on

défini les *courbes de Bézier rationnelles* par la formule

$$C_R : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{n,i}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{n,i}(t)}$$

- 8) i) Reconnaître C_R lorsque $\omega_0 = \dots = \omega_n = 1$.
 ii) On suppose $n = 1$. Montrer que le support de C_R est le segment $[P_0, P_1]$.
 iii) Soient $n = 2$, $P_0 = (0, 1, 0)$, $P_1 = (1, 1, 0)$ et $P_2 = (1, 0, 0)$, $\omega_0 = 2$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Montrer que le support de C_R est un quart du cercle unité $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
 iv) On suppose toujours $n = 2$ et $\omega_0 = 2$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Soient $a > b > 0$. Trouver un choix de P_0, P_1 et P_2 tel que le support de C_R soit le quart d'ellipse $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$.

Rép.— On a alors

$$C_R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)}$$

mais d'après la question 2.i

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) = 1$$

ainsi $C_R = C$.

ii) On a

$$\begin{aligned} C_R(t) &= \frac{\omega_0(1-t)P_0 + \omega_1 t P_1}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t} \\ &= \frac{\omega_0(1-t)P_0 + \omega_1 t P_0 + \omega_1 t P_1 - \omega_1 t P_0}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t} \\ &= P_0 + \frac{\omega_1 t}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &= P_0 + \lambda(t) \overrightarrow{P_0 P_1} \end{aligned}$$

avec $\lambda(t) = \frac{\omega_1 t}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \omega_1 t \leq \omega_0(1-t) + \omega_1 t$ donc $0 \leq \lambda(t) \leq 1$. De plus $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$. Ainsi $\lambda([0, 1]) = [0, 1]$ et $C_R([0, 1])$ est le

segment $[P_0P_1]$.

iii) On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \omega_i B_{2,i}(t) P_i &= 2t^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + (1-t)^2 P_2 \\ &= (2t(1-t) + (1-t)^2, 2t^2 + 2t(1-t), 0) \\ &= (1-t^2, 2t) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_i B_{2,i}(t) = 2t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1+t^2.$$

D'où

$$C_R(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 0 \right).$$

Le changement de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$ montre que le support de C_R est un quart de cercle.

iii) Soit f l'application affine définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ (x, y, z) &\longmapsto (ax, by, z) \end{aligned}$$

On a

$$f(\{x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}) = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0 \right\}.$$

Clairement

$$f(C_R(t)) = f \left(\frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{n,i}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{n,i}(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{n,i}(t) f(P_i)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{n,i}(t)}.$$

Par conséquent, le choix $P_0 = (0, b, 0) = f(0, 1, 0)$, $P_1 = (a, b, 0) = f(1, 1, 0)$ et $P_2 = (a, 0, 0) = f(1, 0, 0)$ convient.