Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du vendredi 21 avril 2023 - Géométrie - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note. Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère orthonormé du plan affine euclidien P. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ la base associée au repère $\mathcal{R}$. On considère l'application affine

$$f : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ (x,y) & \longmapsto & (1-2y, 2-2x). \end{array}$$

Déterminer l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ associée à f et écrire sa matrice dans la base $B = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ (1pt). Montrer que f possède un point fixe I et écrire l'application f dans les coordonnées (x_1, y_1) du repère $\mathcal{R} = (I, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ (1pt).

2.– On considère l'homographie $\Psi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le groupe unitaire. Montrer que pour tout $z \in U \setminus \{1\}$, on a $\Psi(z) \in \mathbb{R}$.

3.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

4.– Soient $a > 0$ et $b > 0$. On considère la courbe paramétreé $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ données par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

Déterminer une équation paramétrique de la droite tangente Δ en $t = \pi/4$ à γ.

5.– On considère la surface paramétrée donnée par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u\cos v, u\sin v, v) \end{array}$$

Montrer que f est régulière en tout point. Soit $v_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Quelle est la nature des courbes $u \longmapsto f(u, v_0)$?

Le problème. – Le but de ce problème est d'établir la formule de Héron puis la formule de Brahmagupta. Ces fomules expriment l'aire d'un triangle et l'aire d'un quadrilatère inscriptible en fonction uniquement de la longueur de leurs côtés respectifs [1]. Dans tout le problème, on note $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté.

Première partie : La formule de Héron.– On considère trois points affinement indépendants A, B et C de $\mathcal{P}$. Le triangle ABC qu'ils forment est donc non dégénéré et non plat. On note a la longueur BC, b la longueur AC et c la longueur AB.

1) Soit ϕ l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
i) En développant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle = a^2$, montrer la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\phi.$$

ii) Montrer que

$$Aire(ABC) = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\phi}.$$

Suggestion.– On pourra introduire la hauteur h issue de C.
iii) En déduire que

$$Aire(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}.$$

2) Démontrer la *formule de Héron* :

$$Aire(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}.$$

Suggestion.– Penser à appliquer l'identité $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

1. En particulier, elles ne font pas intervenir d'angle ou de hauteur.

3) On note $p = a + b + c$ le périmètre du triangle ABC et $s = \frac{1}{2}p$ son demi-périmètre.
i) Montrer que

$$Aire^2(ABC) = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

ii) On rappelle l'inégalité aritmético-géométrique entre trois nombres positifs X, Y et Z :

$$XYZ \leq \frac{(X+Y+Z)^3}{27}$$

avec égalité si et seulement si $X = Y = Z$. Montrer que

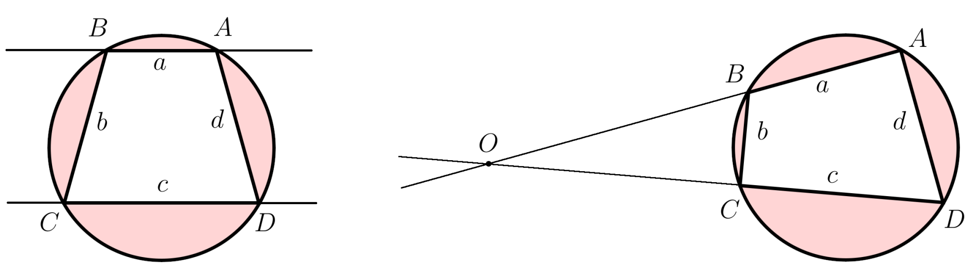
$$\frac{Aire^2(ABC)}{s} \leq \frac{s^3}{27}.$$

iii) Caractériser les triangles pour lesquels le rapport

$$\frac{Aire(ABC)}{p^2}$$

est maximal.

Seconde partie : La formule de Brahmagupta.– On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont quatre sommets distincts se trouvent tous sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et apparaissent dans cet ordre. On note a la longueur du côté AB, b la longueur du côté BC, etc.



Deux exemples de quadrilatères inscriptibles, pour le quadrilatère de gauche $(AB)//(CD)$, pour celui de droite $(AB) \cap (CD) = \{1pt\}$

4) On suppose tout d'abord que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
i) Montrer que la médiatrice $\Delta_{[AB]}$ de $[AB]$ et la médiatrice $\Delta_{[CD]}$ de $[CD]$

passent toutes les deux par Ω. En déduire que $\Delta_{[AB]} = \Delta_{[CD]}$.
ii) Montrer que la réflexion $\sigma_{[AB]}$ par rapport à $\Delta_{[AB]}$ laisse stable l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets du quadrilatère. En déduire que $b = d$.
iii) Soit h la hauteur de $ABCD$ (c'est-à-dire la distance entre les droites (AB) et (CD)). Montrer que

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2}.$$

Suggestion.– S'appuyer sur le théorème de Pythagore. Pour fixer les idées, on pourra supposer $a \leq c$.
iv) Montrer que l'aire du quadrilatère vaut

$$Aire(ABCD) = \frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2}.$$

v) En déduire que

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{(2b-a+c)(2b-c+a)(a+c)^2}.$$

5) On suppose désormais que les droites (AB) et (CD) s'intersectent en un point que l'on note O. Pour fixer les idées, on suppose que les points O, B et A apparaissent dans cet ordre sur la droite (AB) (comme sur l'illustration du sujet). On note θ l'angle orienté de vecteur $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$. Puisque les points O, C et B sont non colinéaires et distincts, on a $\theta \neq 0\,[\pi]$. On considère la bissectrice de (AB) et (CD) ayant un point d'intersection H avec le segment $[AD]$ que l'on note Δ_x. On note Δ_y l'autre bissectrice. On note $\overrightarrow{e}_1 = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$ un vecteur directeur unitaire de Δ_x et $\overrightarrow{e}_2$ un vecteur directeur unitaire de Δ_y tel que la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ soit directe. Faire un dessin *soigneux* faisant apparaître le quadrilatère $ABCD$, les droites (AB), (CD), Δ_x et Δ_y ainsi que le repère $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et l'angle θ. On ne demande pas de faire figurer le cercle.

6) On identifie $\mathcal{P}$ avec $\mathbb{C}$ au moyen de l'application

$$M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2 \longmapsto z = x + iy.$$

On dit que z est l'*affixe du point* M et également qu'il est l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM}$. On note $z_A = \rho_A e^{i\theta_A}$ (avec $\rho_A > 0$) l'affixe de A, $z_B = \rho_B e^{i\theta_B}$ (avec $\rho_A > 0$) l'affixe de B, etc.
i) Exprimer θ_A, θ_B, θ_C et θ_D en fonction de θ.
ii) On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$z \longmapsto \lambda \bar{z}$$

où $\lambda = \dfrac{\rho_C}{\rho_A}$. Décrire géométriquement l'application f. On ne demande pas de justification.
iii) Montrer que $f(A) = C$.

7) Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre nombres complexes distincts. On rappelle que le *birapport* de ces quatre nombres

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$$

est réel non nul si et seulement si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont cocycliques ou alignés.
i) Montrer que la partie imaginaire du birapport $[z_A, z_C, z_B, z_D]$ vaut

$$\Im([z_A, z_C, z_B, z_D]) = \frac{(\rho_C \rho_D - \rho_B \rho_A)}{(\rho_D - \rho_C)(\rho_B - \rho_A)} \sin \theta.$$

Attention ! Dans ce birapport, le nombre z_C est placé avant z_B. Cette disposition facilite le calcul dans le contexte de ce problème.
ii) En déduire que $\rho_C \rho_D = \rho_B \rho_A$.
iii) Montrer que $f(D) = B$.
iv) En déduire que $\lambda = \frac{\rho_B}{\rho_D}$.
v) Déduire de iii) et de 6iii) que $\lambda = \frac{b}{d}$.

8) Montrer que

$$Aire(ABCD) = (1 - \lambda^2) Aire(OAD).$$

9) i) En exprimant l'aire de OAD au moyen de la formule de Héron (voir question 2) montrer que

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{4} \sqrt{F_1 F_2 F_3 F_4}$$

où

$$F_1 = (1+\lambda)(d - \rho_A + \rho_D), \quad F_2 = (1+\lambda)(d + \rho_A - \rho_D)$$
$$F_3 = (1-\lambda)(\rho_A + \rho_D - d), \quad F_4 = (1-\lambda)(\rho_A + \rho_D + d).$$

ii) Montrer que

$$(1+\lambda)\rho_A = \rho_A + \rho_C \quad \text{et} \quad (1+\lambda)\rho_D = \rho_D + \rho_B$$

ainsi que

$$(1-\lambda)\rho_A = \rho_A - \rho_C \quad \text{et} \quad (1-\lambda)\rho_D = \rho_D - \rho_B.$$

iii) En déduire que

$$(1+\lambda)(\rho_A - \rho_D) = a - c \quad \text{et} \quad (1-\lambda)(\rho_A + \rho_D) = a + c.$$

iv) Montrer la *formule de Brahmagupta* :

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c+d)}.$$