Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé de l'examen du vendredi 21 avril 2023 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note. Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère orthonormé du plan affine euclidien P. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ la base associée au repère $\mathcal{R}$. On considère l'application affine

$$f: \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ (x,y) & \longmapsto & (1-2y, 2-2x). \end{array}$$

Déterminer l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ associée à f et écrire sa matrice dans la base $B = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ (1pt). Montrer que f possède un point fixe I et écrire l'application f dans les coordonnées (x_1, y_1) du repère $\mathcal{R} = (I, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ (1pt).

Rép.– L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ associée à l'application affine f est déterminée par la relation

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$$

où M est un point quelconque de P. Or

$$f(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(M) = \begin{pmatrix} 1-2y \\ 2-2x \end{pmatrix}$$

d'où

$$\overrightarrow{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un point M de coordonnées (x, y) est fixe par f si et seulement si

$$\begin{cases} 1-2y &= x \\ 2-2x &= y. \end{cases}$$

La résolution de ce système fournit $I = (1, 0)$ comme unique point fixe. La formule de Grassmann permet alors d'écrire

$$f(M) = I + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$$

soit, en coordonnées et dans le repère $\mathcal{R}_1$:

$$f(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Mat_{\mathcal{B}_1}\overrightarrow{f} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est la base associée à $\mathcal{R}_1$. Puisque $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, on a

$$f(x_1, y_1) = Mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{f} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix}.$$

2.– On considère l'homographie $\Psi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le groupe unitaire. Montrer que pour tout $z \in U \setminus \{1\}$, on a $\Psi(z) \in \mathbb{R}$.

Rép.– Soit $z \in U \setminus \{1\}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ et donc

$$\Psi(z) = i\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Or

$$1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$$

et

$$1 - e^{i\theta} = e^{i0} - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) = -2ie^{i\theta/2}\sin(\theta/2).$$

Ainsi

$$\Psi(e^{i\theta}) = -\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = -\cot(\theta/2) \in \mathbb{R}.$$

3.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Rép.– Dans le triangle MAO on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Les mêmes considérations dans le triangle MBO conduisent à

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$

En sommant

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad [2\pi].$$

4.– Soient $a > 0$ et $b > 0$. On considère la courbe paramétreé $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ données par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

Déterminer une équation paramétrique de la droite tangente Δ en $t = \pi/4$ à γ.

Rép.– Un point quelconque M de coordonnées (x, y) est dans Δ si et seulement s'il existe un nombre u tel que

$$\overrightarrow{\gamma(\frac{\pi}{4})M} = u\overrightarrow{\gamma}'(\frac{\pi}{4}).$$

Cette équation s'écrit également sous la forme

$$M = \gamma(\frac{\pi}{4}) + u\overrightarrow{\gamma}'(\frac{\pi}{4}).$$

En coordonnées, on obtient les équations paramétriques de Δ

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{\sqrt{2}}(1-u) \\ y &= \dfrac{b}{\sqrt{2}}(1+u) \end{cases}$$

où $u \in \mathbb{R}$ est le paramètre.

5.– On considère la surface paramétrée donnée par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u\cos v, u\sin v, v) \end{array}$$

Montrer que f est régulière en tout point. Soit $v_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Quelle est la nature des courbes $u \longmapsto f(u, v_0)$?

Rép.– Un calcul direct montre que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (\sin v_0, -\cos v_0, u)$$

puis que

$$\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\| = \sqrt{1+u^2} > 0.$$

Ainsi f est régulière en tout point $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. La courbe $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une droite passant par le point $(0,0,v_0)$ et de vecteur directeur $(\cos v_0, \sin v_0, 0)$.

Le problème. – Le but de ce problème est d'établir la formule de Héron puis la formule de Brahmagupta. Ces fomules expriment l'aire d'un triangle et l'aire d'un quadrilatère inscriptible en fonction uniquement de la longueur de leurs côtés respectifs [1]. Dans tout le problème, on note $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté.

Première partie : La formule de Héron.– On considère trois points affinement indépendants A, B et C de $\mathcal{P}$. Le triangle ABC qu'ils forment est donc non dégénéré et non plat. On note a la longueur BC, b la longueur AC et c la longueur AB.

1) Soit ϕ l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
i) En développant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle = a^2$, montrer la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\phi.$$

ii) Montrer que

$$Aire(ABC) = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\phi}.$$

Suggestion.– On pourra introduire la hauteur h issue de C.
iii) En déduire que

$$Aire(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}.$$

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle &= \langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\
&= c^2 + b^2 - 2cb\cos\phi.
\end{aligned}$$

Or $\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle = a^2$, d'où la relation d'Al-Kashi.
ii) L'aire du triangle ABC est donnée par

$$Aire(ABC) = \frac{1}{2}ch$$

1. En particulier, elles ne font pas intervenir d'angle ou de hauteur.

où h est la hauteur issue de C et $c = AB$ est la base. Cette hauteur vaut $h = b \sin\phi$ d'où

$$\begin{aligned} Aire(ABC) &= \frac{1}{2} bc \sin\phi \\ &= \frac{1}{2} bc\sqrt{1-\cos^2\phi}. \end{aligned}$$

iii) D'après la formule d'Al-Kashi nous avons

$$\cos\phi = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

En remplaçant dans la formule obtenue à la question précédente on obtient

$$\begin{aligned} Aire(ABC) &= \frac{1}{2} bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}. \end{aligned}$$

2) Démontrer la *formule de Héron* :

$$Aire(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}.$$

Suggestion.– Penser à appliquer l'identité $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Rép.– On a

$$\begin{aligned} Aire(ABC) &= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a-(b-c))(a+(b-c))((b+c)-a)((b+c)+a)}. \end{aligned}$$

3) On note $p = a+b+c$ le périmètre du triangle ABC et $s = \frac{1}{2}p$ son demi-périmètre.
i) Montrer que

$$Aire^2(ABC) = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

ii) On rappelle l'inégalité aritmético-géométrique entre trois nombres positifs X, Y et Z :

$$XYZ \leq \frac{(X+Y+Z)^3}{27}$$

avec égalité si et seulement si $X = Y = Z$. Montrer que

$$\frac{Aire^2(ABC)}{s} \leq \frac{s^3}{27}.$$

iii) Caractériser les triangles pour lesquels le rapport

$$\frac{Aire(ABC)}{p^2}$$

est maximal.

Rép.– i) Il suffit d'injecter la fomule $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ dans la formule de Héron pour obtenir l'égalité demandée.
ii) On applique l'inégalité arithmético-géométrique avec

$$X = s-a, \quad Y = s-b \quad \text{et} \quad Z = s-c$$

pour obtenir

$$\frac{Aire^2(ABC)}{s} \leq \frac{((s-a)+(s-b)+(s-c))^3}{27}.$$

Or

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s$$

d'où

$$\frac{Aire^2(ABC)}{s} \leq \frac{s^3}{27}.$$

iii) Si l'on substitue p à s dans l'inégalité précédente on obtient

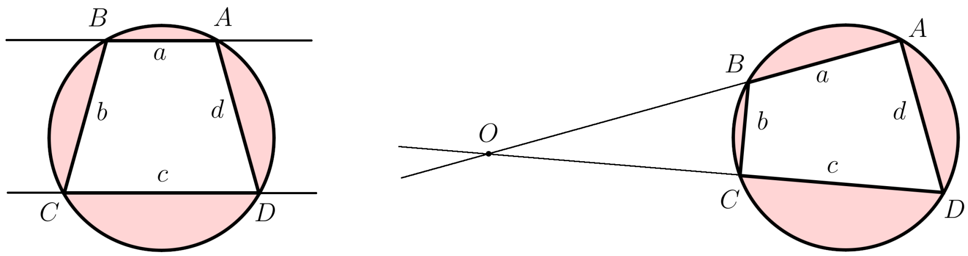
$$Aire(ABC) \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$$

d'où

$$\frac{Aire(ABC)}{p^2} \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Ce rapport est maximal lorsque la constante $\frac{1}{12\sqrt{3}}$ est atteinte c'est-à-dire lorsque $X = Y = Z$. Ceci n'est possible que si $a = b = c$, autrement dit lorsque le triangle ABC est équilatéral.

Seconde partie : La formule de Brahmagupta.– On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont quatre sommets distincts se trouvent tous sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et apparaissent dans cet ordre. On note a la longueur du côté AB, b la longueur du côté BC, etc.



Deux exemples de quadrilatères inscriptibles, pour le quadrilatère de gauche $(AB)//(CD)$*, pour celui de droite* $(AB) \cap (CD) = \{1pt\}$

4) On suppose tout d'abord que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
i) Montrer que la médiatrice $\Delta_{[AB]}$ de $[AB]$ et la médiatrice $\Delta_{[CD]}$ de $[CD]$ passent toutes les deux par Ω. En déduire que $\Delta_{[AB]} = \Delta_{[CD]}$.
ii) Montrer que la réflexion $\sigma_{[AB]}$ par rapport à $\Delta_{[AB]}$ laisse stable l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets du quadrilatère. En déduire que $b = d$.
iii) Soit h la hauteur de $ABCD$ (c'est-à-dire la distance entre les droites (AB) et (CD)). Montrer que

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2}.$$

Suggestion.– S'appuyer sur le théorème de Pythagore. Pour fixer les idées, on pourra supposer $a \leq c$.
iv) Montrer que l'aire du quadrilatère vaut

$$Aire(ABCD) = \frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2}.$$

v) En déduire que

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{(2b-a+c)(2b-c+a)(a+c)^2}.$$

Rép.– i) Soit Ω le centre du cercle $\mathcal{C}$. Le segment $[AB]$ étant une corde de $\mathcal{C}$, sa médiatrice $\Delta_{[AB]}$ passe par Ω et elle est perpendiculaire à (AB). De même $\Delta_{[CD]}$ passe par Ω et est perpendiculaire à (CD). Puisque (AB) et (CD) sont parallèles, c'est donc que les droites $\Delta_{[AB]}$ et $\Delta_{[CD]}$ sont parallèles. Puisqu'elles ont le point Ω en commun, elles sont confondues.
ii) La réflexion $\sigma_{[AB]}$ par rapport à $\Delta_{[AB]}$ envoie A sur B et réciproquement. De même, $\sigma_{[CD]}$ par rapport à $\Delta_{[CD]}$ envoie C sur D et réciproquement. D'après la question i),

$\sigma_{[AB]} = \sigma_{[CD]}$ ce qui montre que $ABCD$ est symétrique par rapport à $\Delta_{[AB]}$. Puisque $\sigma_{[AB]}$ est une isométrie, on a

$$b = BC = \sigma_{[AB]}(B)\sigma_{[AB]}(C) = AD = d.$$

iii) Supposons pour fixer les idées que $a \leq c$ et notons A' la projection orthogonale de A sur (CD). Le triangles $AA'D$ est rectangle en A' donc

$$d^2 = h^2 + A'D^2$$

Comme le quadrilatère est symétrique par rapport à $\Delta_{[AB]}$, on a $A'D = \frac{c-a}{2}$. D'où

$$h^2 = d^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2.$$

iv) On a

$$Aire(ABCD) = 2Aire(AA'D) + Aire(ABB'A')$$

où B' la projection orthogonale de B sur (CD). D'où

$$\begin{aligned} Aire(ABCD) &= 2 \times \left(\frac{1}{2} h \frac{c-a}{2}\right) + ha \\ &= \tfrac{c+a}{2} h. \end{aligned}$$

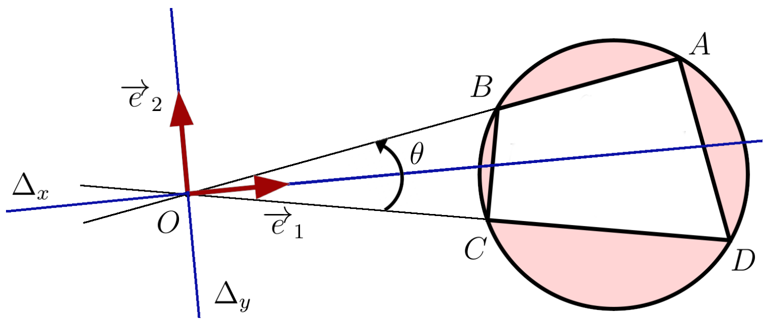
En remplaçant h par la valeur trouvée précédemment, on trouve l'expression demandée.
v) En utilisant une identité remarquable, on trouve

$$\begin{aligned} Aire(ABCD) &= \frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2(b - \frac{c-a}{2})(b + \frac{c-a}{2})} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(2b-c+a)(2b+c-a)(a+c)^2}. \end{aligned}$$

5) On suppose désormais que les droites (AB) et (CD) s'intersectent en un point que l'on note O. Pour fixer les idées, on suppose que les points O, B et A apparaissent dans cet ordre sur la droite (AB) (comme sur l'illustration du sujet). On note θ l'angle orienté de vecteur $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$. Puisque les points O, C et B sont non colinéaires et distincts, on a $\theta \neq 0\,[\pi]$. On considère la bissectrice de (AB) et (CD) ayant un point d'intersection H avec le segment $[AD]$ que l'on note Δ_x. On note Δ_y l'autre bissectrice. On note $\overrightarrow{e}_1 = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$ un vecteur directeur unitaire de Δ_x et $\overrightarrow{e}_2$ un vecteur directeur unitaire de Δ_y tel que la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ soit directe. Faire un dessin *soigneux* faisant apparaître le quadrilatère $ABCD$, les droites (AB), (CD), Δ_x et Δ_y ainsi

que le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et l'angle θ. On ne demande pas de faire figurer le cercle.

Rép.–



6) On identifie $\mathcal{P}$ avec $\mathbb{C}$ au moyen de l'application

$$M = O + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \longmapsto z = x + iy.$$

On dit que z est l'*affixe du point* M et également qu'il est l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM}$. On note $z_A = \rho_A e^{i\theta_A}$ (avec $\rho_A > 0$) l'affixe de A, $z_B = \rho_B e^{i\theta_B}$ (avec $\rho_A > 0$) l'affixe de B, etc.
i) Exprimer θ_A, θ_B, θ_C et θ_D en fonction de θ.
ii) On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$z \longmapsto \lambda \bar{z}$$

où $\lambda = \dfrac{\rho_C}{\rho_A}$. Décrire géométriquement l'application f. On ne demande pas de justification.
iii) Montrer que $f(A) = C$.

Rép.– i) Puisque O, A et B sont alignés, on a $\theta_A = \theta_B$. De même, $\theta_C = \theta_D$. Et puisque Δ_x est la bissectrice de (AB) et (CD), on a mod 2π :

$$\theta_A = \theta_B = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \theta_C = \theta_D = -\frac{\theta}{2}.$$

ii) L'application f est une similitude indirecte. Elle est la composée commutative d'une réflexion $z \mapsto \sigma(z) = \bar{z}$ par rapport à Δ_x et d'une homothétie $z \mapsto h(z) = \lambda z$ de centre O et de rapport λ :

$$f = \sigma \circ h = h \circ \sigma.$$

iii) On a

$$f(z_A) = \lambda \bar{z_A} = \lambda \rho_A e^{-i\theta_A} = \lambda \rho_A e^{-i\frac{\theta}{2}} = \lambda \frac{\rho_A}{\rho_C} z_C.$$

Puisque $\lambda = \dfrac{\rho_C}{\rho_A}$ on en déduit $f(z_A) = z_C$.

7) Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre nombres complexes distincts. On rappelle que le *bi-rapport* de ces quatre nombres

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$$

est réel non nul si et seulement si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont cocycliques ou alignés.
i) Montrer que la partie imaginaire du birapport $[z_A, z_C, z_B, z_D]$ vaut

$$\Im([z_A, z_C, z_B, z_D]) = \frac{(\rho_C\rho_D - \rho_B\rho_A)}{(\rho_D - \rho_C)(\rho_B - \rho_A)} \sin\theta.$$

Attention ! Dans ce birapport, le nombre z_C est placé avant z_B. Cette disposition facilite le calcul dans le contexte de ce problème.
ii) En déduire que $\rho_C\rho_D = \rho_B\rho_A$.
iii) Montrer que $f(D) = B$.
iv) En déduire que $\lambda = \frac{\rho_B}{\rho_D}$.
v) Déduire de iii) et de 6iii) que $\lambda = \frac{b}{d}$.

Rép.– i) Calculons le birapport de ces quatre points

$$\begin{aligned}
[z_A, z_C, z_B, z_D] &= \frac{z_D - z_A}{z_D - z_C} \cdot \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \\
&= \frac{\rho_D e^{-i\theta/2} - \rho_A e^{i\theta/2}}{\rho_D e^{-i\theta/2} - \rho_C e^{-i\theta/2}} \cdot \frac{\rho_B e^{i\theta/2} - \rho_C e^{-i\theta/2}}{\rho_B e^{i\theta/2} - \rho_A e^{i\theta/2}} \\
&= \frac{\rho_D e^{-i\theta/2} - \rho_A e^{i\theta/2}}{\rho_D - \rho_C} \cdot \frac{\rho_B e^{i\theta/2} - \rho_C e^{-i\theta/2}}{\rho_B - \rho_A} \\
&= \frac{\rho_D\rho_B + \rho_A\rho_C - \rho_A\rho_B e^{i\theta} - \rho_C\rho_D e^{-i\theta}}{(\rho_D - \rho_C)(\rho_B - \rho_A)} \\
&= \frac{\rho_D\rho_B + \rho_A\rho_C - (\rho_A\rho_B + \rho_C\rho_D)\cos\theta + i(\rho_C\rho_D - \rho_B\rho_A)\sin\theta}{(\rho_D - \rho_C)(\rho_B - \rho_A)}.
\end{aligned}$$

Ainsi la partie imaginaire de $[z_A, z_C, z_B, z_D]$ est

$$\Im([z_A, z_C, z_B, z_D]) = \frac{(\rho_C\rho_D - \rho_B\rho_A)}{(\rho_D - \rho_C)(\rho_B - \rho_A)} \sin\theta.$$

ii) Puisque le quadilatère $(ABCD)$ est inscriptible, on doit avoir $[z_A, z_C, z_B, z_D] \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\Im([z_A, z_C, z_B, z_D]) = 0$. Puisque $\theta \neq 0\,[\pi]$, il faut nécessairement que

$$\rho_C\rho_D - \rho_B\rho_A = 0.$$

iii) On a

$$f(z_D) = \lambda \bar{z_D} = \lambda \rho_D e^{i/\theta/2} = \frac{\rho_C}{\rho_A}\rho_D e^{i/\theta/2}.$$

Or, d'après la question précédente

$$\frac{\rho_C}{\rho_A}\rho_D = \rho_B$$

ainsi $f(z_D) = z_B$.
iv) L'égalité $f(z_D) = z_B$ implique $|f(z_D)| = |z_B|$ soit encore $|\lambda\overline{z_D}| = |z_B|$ i. e. $\lambda\rho_D = \rho_B$. D'où l'égalité recherchée.
v) D'après iii) et 6iii) on a $f([AD]) = [CB]$. Puisque f est une similitude de rapport $\lambda > 0$ et que $AD = d$ et $BC = b$, on a

$$\lambda = \frac{BC}{AD} = \frac{b}{d}.$$

8) Montrer que

$$Aire(ABCD) = (1 - \lambda^2)Aire(OAD).$$

Rép.– On a

$$Aire(ABCD) = Aire(OAD) - Aire(OBC)$$

Or $f(OAD) = OBC$ d'après les questions précédentes. Puisque f est une similiture de rapport λ, on a

$$Aire(OBC) = \lambda^2 Aire(OAD)$$

d'où l'égalité demandée.

9) i) En exprimant l'aire de OAD au moyen de la formule de Héron (voir question 2) montrer que

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{F_1F_2F_3F_4}$$

où

$$F_1 = (1+\lambda)(d - \rho_A + \rho_D), \quad F_2 = (1+\lambda)(d + \rho_A - \rho_D)$$

$$F_3 = (1-\lambda)(\rho_A + \rho_D - d), \quad F_4 = (1-\lambda)(\rho_A + \rho_D + d).$$

ii) Montrer que

$$(1+\lambda)\rho_A = \rho_A + \rho_C \quad \text{et} \quad (1+\lambda)\rho_D = \rho_D + \rho_B$$

ainsi que

$$(1-\lambda)\rho_A = \rho_A - \rho_C \quad \text{et} \quad (1-\lambda)\rho_D = \rho_D - \rho_B.$$

iii) En déduire que

$$(1+\lambda)(\rho_A-\rho_D)=a-c \quad \text{et} \quad (1-\lambda)(\rho_A+\rho_D)=a+c.$$

iv) Montrer la *formule de Brahmagupta* :

$$Aire(ABCD)=\frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c+d)}.$$

Rép.– i) On détermine l'aire de OAD au moyen de la formule de Héron en posant $a=\rho_A$, $b=\rho_D$ et $c=AD=d$, on obtient

$$\begin{aligned} Aire(OAD) &= \sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \\ &= \sqrt{(d-\rho_A+\rho_D)(d+\rho_A-\rho_D)(\rho_A+\rho_D-d)(\rho_A+\rho_D+d)} \end{aligned}$$

Puisque

$$Aire(ABCD)=\frac{1}{4}(1-\lambda^2)Aire(OAD)$$

en distribuant le terme $1-\lambda^2$ dans la racine, on obtient la formule demandée.
ii) Puisque f est une similitude de rapport $\lambda>0$ on a $\rho_C=\lambda\rho_A$ et $\rho_B=\lambda\rho_D$. On en déduit

$$(1+\lambda)\rho_A=\rho_A+\rho_C \quad \text{et} \quad (1+\lambda)\rho_D=\rho_D+\rho_B$$

ainsi que

$$(1-\lambda)\rho_A=\rho_A-\rho_C \quad \text{et} \quad (1-\lambda)\rho_D=\rho_D-\rho_B.$$

iii) On a donc

$$\begin{aligned} (1+\lambda)(\rho_A-\rho_D) &= (\rho_A+\rho_C)-(\rho_D+\rho_B) \\ &= (\rho_A-\rho_B)-(\rho_D-\rho_C) \\ &= a-c \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(\rho_A+\rho_D) &= (\rho_A-\rho_C)+(\rho_D-\rho_B) \\ &= (\rho_A-\rho_B)+(\rho_D-\rho_C) \\ &= a+c. \end{aligned}$$

vi) La formule de Brahmagupta découle de celle établie en i) une fois les facteurs F_1, F_2, F_3 et F_4 exprimés en fonction de a,b,c et d. Puisque $\lambda=\frac{b}{d}$, on a

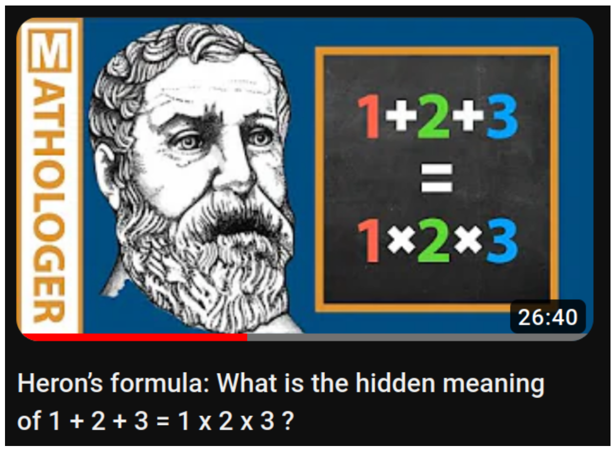
$$(1+\lambda)d=b+d \quad \text{et} \quad (1-\lambda)d=b-d$$

et avec les résultats obtenus en iii) on déduit

$$F_1=b+d+c-a, \quad F_2=b+d-c+a, \quad F_3=a+c+d-b, \quad F_4=a+c-d+b.$$

On retrouve les quatres facteurs de la formule de Brahmagupta.

Mathologer.– Ce sujet m'a été inspiré par la vidéo *Quel est le sens caché de* $1+2+3 = 1\times 2\times 3$ *?* dont je recommande très chaleureusement le visionnage. Profitez-en, si vous ne la connaissez pas, pour découvrir la chaîne de Mathologer. Elle est incontournable pour tout.e (futur.e) professeur.e de mathématiques qui se respecte.



Formulaire trigonométrique

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$