Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 24 janvier 2023 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– [2pts] Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

où a et b sont deux nombres réels quelconques. Est-il vrai que l'application f est toujours une application affine ?

2.– [2pts] Soit $\theta \in]0, \pi[$. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = e^{i\theta}\overline{z}$ est une réflexion s_Δ selon la droite Δ passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'horizontale.

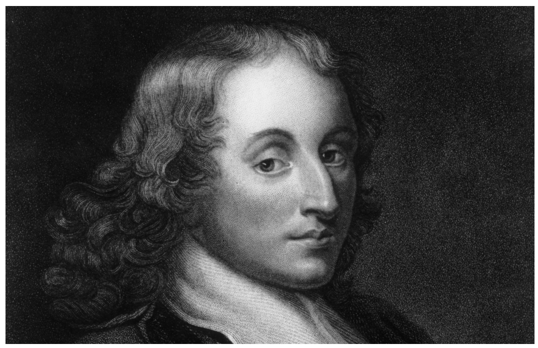
3.– [2pts] Le théorème de classification des isométries de l'espace s'énonce ainsi : *Tout déplacement de l'espace est soit l'id, soit une translation, soit une rotation ou un vissage. Tout anti-déplacement de l'espace est soit une réflexion plane, soit une symétrie glissée c'est-à-dire la composée commutative d'une réflexion par rapport à un plan et d'une translation dont le vecteur appartient à la direction du plan.*

4.– [2pts] Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Alors, au sens de la mesure des angles orientés de vecteurs on a

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$$

5.– [4pts] On rappelle que l'ensemble des nombres constructibles forment un sous-corps du corps des réels, que si p est constructible alors $\sqrt{p}$ est constructible et que le nombre π n'est pas constructible. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

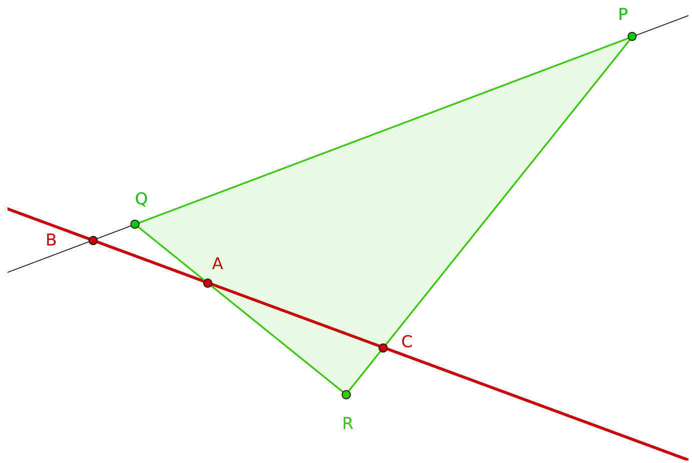
a) [1pt] La quadrature du cercle est impossible.
b) [1pt] Les nombres rationnels sont constructibles.
c) [1pt] $\sqrt[3]{2}$ est constructible.
d) [1pt] $\sqrt[4]{7}$ est constructible.



Blaise Pascal, dont on a célébré le 400ème anniversaire en 2023.

Le problème. – [$\geq$ 10 pts] Le but de ce problème est d'établir le résultat suivant dû à Blaise Pascal : *Étant donné un hexagone inscrit dans un cercle, les points d'intersections des côtés opposés sont alignés.*

Première partie : Le théorème de Ménélaüs.– Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien. On considère un triangle non plat de $\mathcal{P}$ de sommets P, Q et R. On choisit trois autres points A, B, C, distincts de P, Q, R, tels que $A \in (QR)$, $B \in (QP)$ et $C \in (RP)$.



Le but de cette première partie est de démontrer le théorème de Ménélaüs : les points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} = 1$$

1) Soient $f, g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ sont deux applications affines. Montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

2)a) Montrer que si h est une homothétie affine de centre Ω et rapport $k \neq 1$ alors $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de même rapport $k \neq 1$. On rappelle que, pour tout $M \in \mathcal{P}$, une telle homothétie est définie par

$$h(M) = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

b) Montrer la réciproque.
c) En déduire que si h_1 et h_2 sont deux homothéties de rapport k_1 et k_2 respectivement et si $k_1 k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$.

3) Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $k_1 = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AR}}$, h_2 l'homothétie de centre B et de rapport $k_2 = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ et h_3 l'homothétie de centre C et de rapport $k_3 = \dfrac{\overline{CR}}{\overline{CP}}$. On suppose que A, B et C sont alignés et on note Δ la

droite qui les contient.

a) Montrer que $h_1(\Delta) = \Delta$, puis que $h_2(\Delta) = \Delta$ et $h_3(\Delta) = \Delta$. En déduire que $h_3 \circ h_2 \circ h_1(\Delta) = \Delta$.

b) Déterminer $h_3 \circ h_2 \circ h_1(R)$.

c) On suppose que $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est une homothétie propre, c'est-à-dire de rapport différent de 1. Exhiber une contradiction en montrant que $R \in \Delta$.

d) En déduire que $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} = 1$.

4) On s'intéresse maintenant à la réciproque de la question 3. On suppose que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

et on cherche à montrer les points A, B et C sont alignés.
a) On admet que si $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$ alors f est une translation et réciproquement. Montrer que $f = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est l'identité.
b) Montrer que le produit $k_1 k_2$ des rapports des homothéties h_1 et h_2 n'est pas égal à 1.
c) Montrer que le point Ω défini par

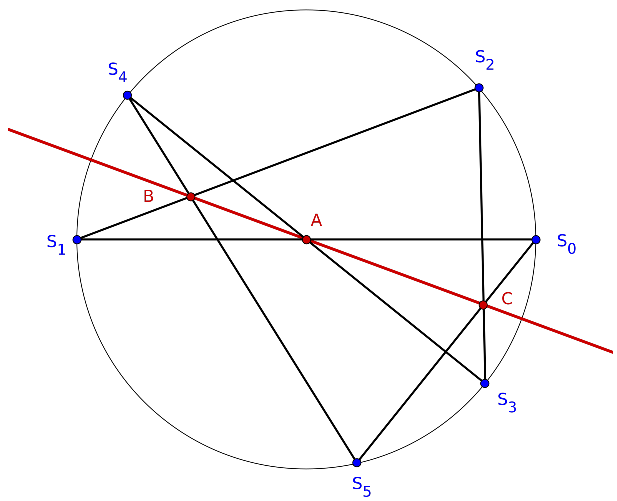
$$\Omega = A + \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{AB}$$

est le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$.
d) Déduire du a) et du c) que les points A, B et C sont alignés (on notera que les points A, B et Ω sont alignés).

Seconde partie : L'hexagramme mystique de Pascal.– On considère six points, $S_0, ..., S_5$, inscrits dans un cercle $\mathcal{C}$ et formant un hexagone générique non nécessairement convexe. Le mot *générique* signifie qu'il n'y a aucun parallélisme entre les côtés de l'hexagone. En particulier, les trois intersections suivantes existent :

— l'intersection de (S_0S_1) avec (S_3S_4), notée A,
— l'intersection de (S_1S_2) avec (S_4S_5), notée B,
— l'intersection de (S_2S_3) avec (S_5S_0), notée C.

Le but de cette partie est de montrer que les points A, B et C sont alignés.



5) On considère les trois intersections suivantes :

— l'intersection de (S_5S_0) avec (S_1S_2), notée P,

— l'intersection de (S_1S_2) avec (S_3S_4), notée Q,

— l'intersection de (S_3S_4) avec (S_5S_0), notée R.

Faire un dessin *soigné* faisant apparaître le triangle T de sommets P, Q et R.

6) a) Utiliser le théorème de Ménélaüs de la partie 1 pour montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $r = 1$ où

$$r = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}}$$

b) Montrer, en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle T et aux points S_0, A, S_1, que

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}}.$$

c) Ecrire deux relations similaires en appliquant le théorème de Ménélaüs aux points S_4, B, S_5 puis aux points S_2, C, S_3.

d) En déduire que

$$r = \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}} \cdot \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_2P}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}} \cdot \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}} \cdot \frac{\overline{S_5P}}{\overline{S_5R}}$$

7) On rappelle que la puissance $P_{\mathcal{C}}(M)$ d'un point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est la différence

$$P_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - R^2$$

où O est le centre de $\mathcal{C}$ et R son rayon.
a) Soit D une droite passant par M et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts I et J. Montrer que

$$\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ} \rangle = P_{\mathcal{C}}(M)$$

Suggestion.– On pourra introduire le point K diamétralement opposé à J.
b) Montrer que l'on a également

$$\overline{MI} \cdot \overline{MJ} = P_{\mathcal{C}}(M).$$

8) a) Montrer que

$$\overline{PS_1} \cdot \overline{PS_2} = \overline{PS_5} \cdot \overline{PS_0}$$

et en déduire que

$$r = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_0R}} \cdot \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_5R}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}} \cdot \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}}.$$

b) En considérant $P_{\mathcal{C}}(Q)$ et $P_{\mathcal{C}}(R)$ montrer que $r = 1$.