Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 MEEF – Géométrie

## Examen du 24 janvier 2023 - durée 2h

CORRIGÉ

*Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Vrai-Faux. –** Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

**1.– [2pts]** Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels quelconques. Est-il vrai que l'application $f$ est toujours une application affine ?

**Rép.–** VRAI - Explicitons d'abord le repère affine implicitement utilisé. Il s'agit du repère $\mathcal{R} = (O, A_1)$ où l'origine $O$ est le nombre 0 et le point $A_1$ le nombre 1. L'application $f$ peut se ré-écrire

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M = (x)_{\mathcal{R}} & \longmapsto & M' = (ax+b)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

Il faut montrer que pour tout $M = (x)_{\mathcal{R}}$ et $N = (y)_{\mathcal{R}}$, il existe une application $\overrightarrow{f}$ linéaire telle que

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$$

Notons $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA_1}$. On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{(O + x\,\overrightarrow{i})(O + y\,\overrightarrow{i})} \\ &= \overrightarrow{(O + x\,\overrightarrow{i})(O + x\,\overrightarrow{i} + (y-x)\,\overrightarrow{i})} \\ &= (y-x)\,\overrightarrow{i}. \end{aligned}$$

Similairement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{(O + (ax+b)\,\overrightarrow{i})(O + (ay+b)\,\overrightarrow{i})} \\ &= \overrightarrow{(O + (ax+b)\,\overrightarrow{i})(O + (ax+b)\,\overrightarrow{i} + a(y-x)\,\overrightarrow{i})} \\ &= a(y-x)\,\overrightarrow{i}. \end{aligned}$$

Ainsi
$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = a\overrightarrow{MN}.$$
L'application linéaire $\overrightarrow{f} = a\,\overrightarrow{id}$ convient, ce qui montre que $f$ est affine.

**2.– [2pts]** Soit $\theta \in ]0, \pi[$. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = e^{i\theta}\overline{z}$ est une réflexion $s_\Delta$ selon la droite $\Delta$ passant par l'origine et faisant un angle $\theta$ avec l'horizontale.

**Rép.–** FAUX. Si c'était le cas, chaque point de la droite $\Delta$ devrait être fixé par $f$. Notons que
$$\Delta := \{z = \rho e^{i\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}\}$$
n'est jamais confondue avec l'axe des abscisses puisque $\theta \in ]0, \pi[$. On a
$$f(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho$$
Ainsi, $f$ envoie la droite $\Delta$ sur l'axe des abscisses. En particulier, elle ne fixe pas $\Delta$.

**3.– [2pts]** Le théorème de classification des isométries de l'espace s'énonce ainsi : *Tout déplacement de l'espace est soit l'id, soit une translation, soit une rotation ou un vissage. Tout anti-déplacement de l'espace est soit une réflexion plane, soit une symétrie glissée c'est-à-dire la composée commutative d'une réflexion par rapport à un plan et d'une translation dont le vecteur appartient à la direction du plan.*

**Rép.–** FAUX. Il manque les anti-rotations.

**4.– [2pts]** Soient $A$, $B$ et $M$ trois points distincts d'un cercle de centre $O$. Alors, au sens de la mesure des angles orientés de vecteurs on a
$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$$
**Rép.–** VRAI. Dans le triangle $MAO$ on a
$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$
Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où
$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$
Les mêmes considérations dans le triangle $MBO$ conduisent à
$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$
En sommant
$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad [2\pi].$$

**5.– [4pts]** On rappelle que l'ensemble des nombres constructibles forment un sous-corps du corps des réels, que si $p$ est constructible alors $\sqrt{p}$ est constructible et que le nombre $\pi$ n'est pas constructible. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

a) [1pt ] La quadrature du cercle est impossible.
b) [1pt ] Les nombres rationnels sont constructibles.
c) [1pt ] $\sqrt[3]{2}$ est constructible.
d) [1pt ] $\sqrt[4]{7}$ est constructible.

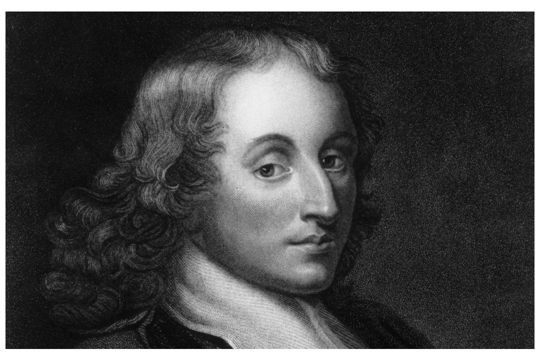
**Rép.–** a) VRAIE. Sinon $\pi$ serait constructible.
b) VRAIE. Les nombres constructibles forment un sous-corps de $\mathbb{R}$ et tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$.
c) FAUSSE. Le nombre $\sqrt[3]{2}$ est racine de $x^3-2=0$, et $x^3-2$ est un polynôme irréductible. En effet, supposons qu'il s'écrive

$$\begin{aligned} x^3-2 &= (x+\lambda)(x^2+bx+c) \\ &= x^3+(\lambda+b)x^2+(\lambda b+c)x+\lambda c. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$b=-\lambda, c=\lambda^2, \lambda c=0$$

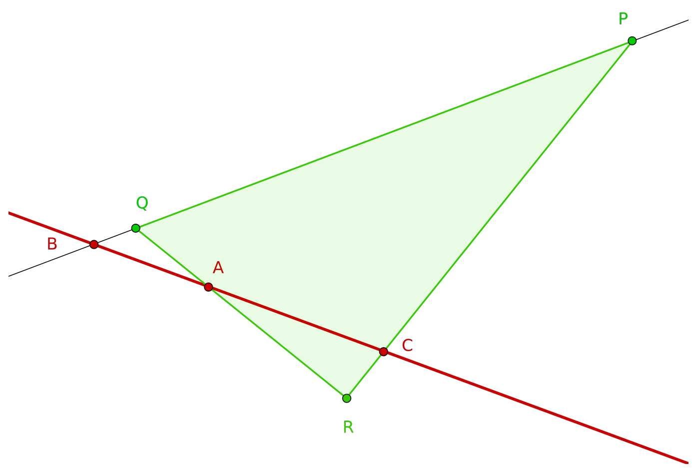
et donc $\lambda=0$. Ainsi 0 est racine de $x^3-2$. Contradiction. Il s'en suit que $\sqrt[3]{2}$ est algébrique de degré 3. Puisque 3 n'est pas une puissance de 2, par le théorème de Wentzel $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.
d) VRAIE. D'après le rappel formulé dans la question, le nombre $\sqrt{7}$ est constructible et donc $\sqrt{\sqrt{7}}=\sqrt[4]{7}$ également.



Blaise Pascal, dont on a célébré le 400ème anniversaire en 2023.

**Le problème.** – [$\geq$ 10 pts] Le but de ce problème est d'établir le résultat suivant dû à Blaise Pascal : *Étant donné un hexagone inscrit dans un cercle,* *les points d'intersections des côtés opposés sont alignés.*

Première partie : Le théorème de Ménélaüs.– Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien. On considère un triangle non plat de $\mathcal{P}$ de sommets $P$, $Q$ et $R$. On choisit trois autres points $A, B, C$, distincts de $P$, $Q$, $R$, tels que $A \in (QR)$, $B \in (QP)$ et $C \in (RP)$.




Le but de cette première partie est de démontrer le théorème de Ménélaüs : les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} = 1$$

1) Soient $f, g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ sont deux applications affines. Montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

**Rép.**– On note $M' = g(M)$ et $N' = g(N)$. On a

$$\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g(M)g(N)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MN})).$$

Ainsi $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

2)a) Montrer que si $h$ est une homothétie affine de centre $\Omega$ et rapport $k \neq 1$ alors $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de même rapport $k \neq 1$. On rappelle que, pour tout $M \in \mathcal{P}$, une telle homothétie est définie par

$$h(M) = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

b) Montrer la réciproque.
c) En déduire que si $h_1$ et $h_2$ sont deux homothéties de rapport $k_1$ et $k_2$ respectivement et si $k_1k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport $k_1k_2$.

**Rép.**– a) On a

$$\overrightarrow{h(M)h(N)} = \overrightarrow{(\Omega + k\overrightarrow{\Omega M})(\Omega + k\overrightarrow{\Omega N})} = \overrightarrow{(\Omega + k\overrightarrow{\Omega M})(\Omega + k\overrightarrow{\Omega M} + k\overrightarrow{MN})} = k\overrightarrow{MN}.$$

Donc $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de rapport $k$.
b) Réciproquement, si $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de rapport $k$ ($\neq 1$) alors $h$ a nécessairement un point fixe unique. En effet, soit $O \in E$ un point quelconque, la relation de Grassmann s'écrit

$$h(M) = h(O) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OM}) = O' + k\overrightarrow{OM} = O' + k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M}$$

d'où

$$-\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M}.$$

Ainsi $M$ est point fixe de $h$ ssi

$$-\overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M} \iff \overrightarrow{O'M} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OO'}.$$

On note $\Omega$ ce point fixe. Si on écrit de nouveau la relation de Grassmann, on obtient cette fois

$$h(M) = h(\Omega) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$$

l'application $h$ est donc une homothétie de rapport $k$ et de centre $\Omega$.

c) La déduction est immédiate. On a en effet

$$\overrightarrow{h_1 \circ h_2} = \overrightarrow{h_1} \circ \overrightarrow{h_2} = k_1k_2Id.$$

Puisque $k_1k_2 \neq 1$, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie et son rapport est celui de $\overrightarrow{h_1 \circ h_2}$, c'est-à-dire $k_1k_2$.

3) Soit $h_1$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $k_1 = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AR}}$, $h_2$ l'homothétie de centre $B$ et de rapport $k_2 = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ et $h_3$ l'homothétie de centre $C$ et de rapport $k_3 = \dfrac{\overline{CR}}{\overline{CP}}$. On suppose que $A$, $B$ et $C$ sont alignés et on note $\Delta$ la droite qui les contient.

a) Montrer que $h_1(\Delta) = \Delta$, puis que $h_2(\Delta) = \Delta$ et $h_3(\Delta) = \Delta$. En déduire que $h_3 \circ h_2 \circ h_1(\Delta) = \Delta$.

b) Déterminer $h_3 \circ h_2 \circ h_1(R)$.

c) On suppose que $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est une homothétie propre, c'est-à-dire de rapport différent de 1. Exhiber une contradiction en montrant que $R \in \Delta$.

d) En déduire que $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \dfrac{\overline{CR}}{\overline{CP}} = 1$.

**Rép.**– a) On a $A \in \Delta$ donc $h_1(\Delta) = \Delta$ et similairement pour $h_2$ et $h_3$. Il s'en suit que $h_3 \circ h_2 \circ h_1(\Delta) = \Delta$.
b) On a $h_1(R) = Q$, $h_2(Q) = P$, $h_3(P) = R$ et donc $h_3 \circ h_2 \circ h_1(R) = R$.
c) Si $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ était une homothétie propre, son centre serait $R$. Puisque $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ préserve $\Delta$ son centre $R$ appartient à $\Delta$. Or $R$ n'est pas dans $\Delta$. En effet, cela signifierait que $R = C$ ce qui est exclu par hypothèse.
d) D'après une question précédente, le produit des rapports $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ des homothéties $h_1$, $h_2$ et $h_3$ vaut nécessairement 1 car sinon $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ serait une homothétie.

4) On s'intéresse maintenant à la réciproque de la question 3. On suppose que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

et on cherche à montrer les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
a) On admet que si $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$ alors $f$ est une translation et réciproquement. Montrer que $f = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est l'identité.
b) Montrer que le produit $k_1 k_2$ des rapports des homothéties $h_1$ et $h_2$ n'est pas égal à 1.
c) Montrer que le point $\Omega$ défini par

$$\Omega = A + \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{AB}$$

est le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$.
d) Déduire du a) et du c) que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés (on notera que les points $A$, $B$ et $\Omega$ sont alignés).

**Rép.**– a) L'hypothèse implique que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$ et donc $f$ est une translation. Comme $f(R) = R$, c'est l'identité.
b) Si $k_1 k_2 = 1$ alors $k_3 = 1$ et l'homothétie $h_3$ est l'identité. Mais puisque $h_3(P) = R$ cela signifierait que $P = R$. Contradiction (le triangle serait plat et dégénéré).
c) On a

$$h_1(\Omega) = A + k_1 \overrightarrow{A\Omega}$$

d'où

$$\begin{aligned}
h_2(h_1(\Omega)) &= B + k_2\, \overrightarrow{Bh_1(\Omega)} \\
&= B + k_2 \left( \overrightarrow{BA} + k_1\, \overrightarrow{A\Omega} \right) \\
&= A + (1-k_2)\overrightarrow{AB} + k_1 k_2 \overrightarrow{A\Omega}
\end{aligned}$$

On remplace $\overrightarrow{AB}$ par l'expression donnée dans la question

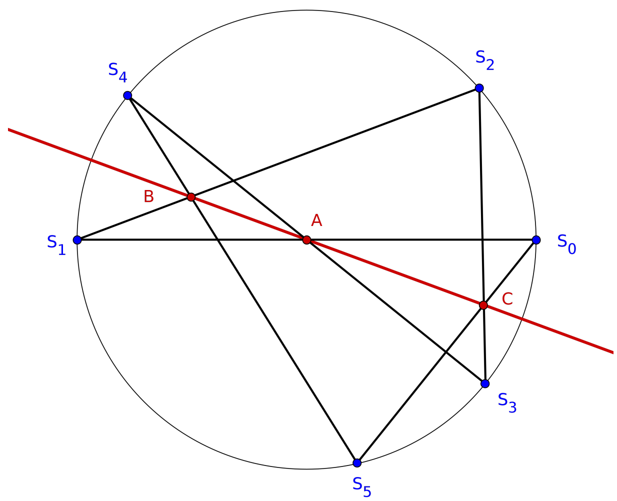
$$\begin{aligned}
h_2(h_1(\Omega)) &= A + (1-k_2)\overrightarrow{AB} + k_1 k_2 \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{AB} \\
&= A + \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{AB} \\
&= \Omega.
\end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{AB}$ les points $A$, $B$ et $\Omega$ sont alignés.
d) De $f = id$ on déduit $h_3^{-1} = h_2 \circ h_1$. Or $h_3^{-1}$ est une homothétie de centre $C$. D'après la question précédente, son centre $C$ est aligné avec la droite $(AB)$ puisque $A$ et $B$ sont les centres de $h_1$ et $h_2$.

Seconde partie : L'hexagramme mystique de Pascal.– On considère six points, $S_0, ..., S_5$, inscrits dans un cercle $\mathcal{C}$ et formant un hexagone générique non nécessairement convexe. Le mot *générique* signifie qu'il n'y a aucun parallélisme entre les côtés de l'hexagone. En particulier, les trois intersections suivantes existent :

— l'intersection de $(S_0S_1)$ avec $(S_3S_4)$, notée $A$,
— l'intersection de $(S_1S_2)$ avec $(S_4S_5)$, notée $B$,
— l'intersection de $(S_2S_3)$ avec $(S_5S_0)$, notée $C$.

Le but de cette partie est de montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.




5) On considère les trois intersections suivantes :

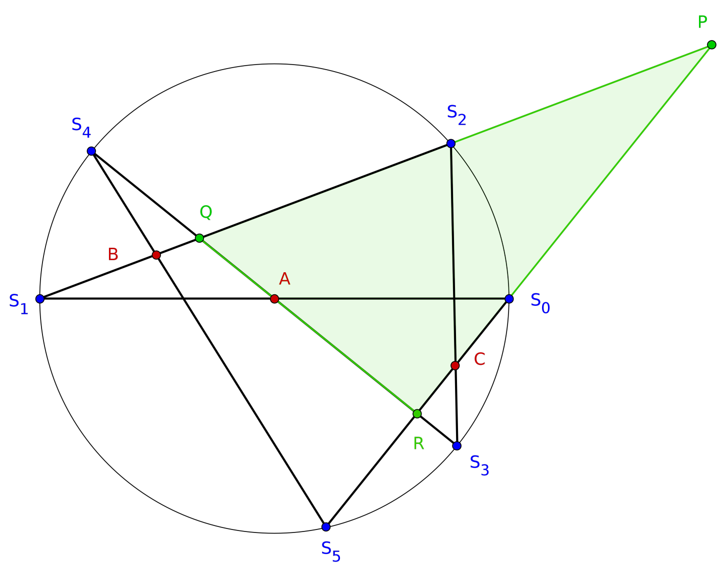
— l'intersection de $(S_5S_0)$ avec $(S_1S_2)$, notée $P$,

— l'intersection de $(S_1S_2)$ avec $(S_3S_4)$, notée $Q$,

— l'intersection de $(S_3S_4)$ avec $(S_5S_0)$, notée $R$.

Faire un dessin *soigné* faisant apparaître le triangle $T$ de sommets $P$, $Q$ et $R$.

**Rép.–**



6) a) Utiliser le théorème de Ménélaüs de la partie 1 pour montrer que $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $r = 1$ où

$$r = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}}$$

b) Montrer, en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle $T$ et aux points $S_0, A, S_1$, que

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}}.$$

c) Ecrire deux relations similaires en appliquant le théorème de Ménélaüs aux points $S_4, B, S_5$ puis aux points $S_2, C, S_3$.
d) En déduire que

$$r = \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}} \cdot \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_2P}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}} \cdot \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}} \cdot \frac{\overline{S_5P}}{\overline{S_5R}}$$

**Rép.–** a) C'est l'application directe du théorème de Ménélaüs puisque $A \in (QR)$, $B \in (QP)$ et $C \in (PR)$.
b) En appliquant directement le théorème de Ménélaüs on déduit

$$\frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}} = 1$$

d'où

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}}.$$

c) On trouve

$$\frac{\overline{S_4Q}}{\overline{S_4R}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{S_5R}}{\overline{S_5P}} = 1$$

et

$$\frac{\overline{S_2P}}{\overline{S_2Q}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{S_3Q}}{\overline{S_3R}} = 1$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}} \cdot \frac{\overline{S_5P}}{\overline{S_5R}}$$

et

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_2P}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}}$$

d) En mettant tous les résultats ensemble, on trouve

$$r = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_1P}} \cdot \frac{\overline{S_0P}}{\overline{S_0R}} \cdot \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}} \cdot \frac{\overline{S_5P}}{\overline{S_5R}} \cdot \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_2P}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}}$$

7) On rappelle que la puissance $P_{\mathcal{C}}(M)$ d'un point $M$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est la différence

$$P_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - R^2$$

où $O$ est le centre de $\mathcal{C}$ et $R$ son rayon.
a) Soit $D$ une droite passant par $M$ et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts $I$ et $J$. Montrer que

$$\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ} \rangle = P_{\mathcal{C}}(M)$$

*Suggestion.–* On pourra introduire le point $K$ diamétralement opposé à $J$.
b) Montrer que l'on a également

$$\overline{MI} \cdot \overline{MJ} = P_{\mathcal{C}}(M).$$

**Rép.–** a) Le point clé est de remarquer que

$$\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ} \rangle = \langle \overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MJ} \rangle$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ} \rangle &= \langle \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OJ} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OJ} \rangle \\ &= MO^2 - OJ^2 \\ &= P_{\mathcal{C}}(M) \end{aligned}$$

b) Puisque $M$, $I$ et $J$ sont alignés, on a

$$\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ} \rangle = \overline{MI} \cdot \overline{MJ}$$

et il suffit d'appliquer le résultat du a) pour conclure.
8) a) Montrer que

$$\overline{PS_1} \cdot \overline{PS_2} = \overline{PS_5} \cdot \overline{PS_0}$$

et en déduire que

$$r = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_0R}} \cdot \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_5R}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}} \cdot \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}}.$$

b) En considérant $P_{\mathcal{C}}(Q)$ et $P_{\mathcal{C}}(R)$ montrer que $r = 1$.

**Rép.–** a) En considérant la droite $(S_1S_2)$ on constate que $P_{\mathcal{C}}(P) = \overline{PS_1} \cdot \overline{PS_2}$. En considérant la droite $(S_0S_5)$, on a cette fois $P_{\mathcal{C}}(P) = \overline{PS_0} \cdot \overline{PS_5}$. Ainsi $\overline{PS_1} \cdot \overline{PS_2} = \overline{PS_5} \cdot \overline{PS_0}$. En reportant dans l'expression de $r$, des simplications s'effectuent et conduisent à

$$r = \frac{\overline{S_1Q}}{\overline{S_0R}} \cdot \frac{\overline{S_2Q}}{\overline{S_5R}} \cdot \frac{\overline{S_3R}}{\overline{S_3Q}} \cdot \frac{\overline{S_4R}}{\overline{S_4Q}}.$$

b) Une démarche similaire montre que

$$P_{\mathcal{C}}(Q) = \overline{QS_1} \cdot \overline{QS_2} = \overline{QS_3} \cdot \overline{QS_4}$$

et

$$P_{\mathcal{C}}(R) = \overline{RS_3} \cdot \overline{RS_4} = \overline{RS_0} \cdot \overline{RS_5}.$$

L'expression de $r$ se simplifie complètement et on obtient la valeur $r = 1$.