Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 MEEF – Géométrie

## Examen du 15 décembre 2025 - durée 2h

*Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Vrai-Faux.** – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse (0.5pt) puis justifier la réponse donnée (1.5pt). Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

**1.– [2pts]** On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Soit $E$ un espace affine de dimension $n$. Est-il vrai qu'une application affine $f : E \to E$ est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, ..., A_n)$ ?

**2.–** Soit $E$ un espace affine euclidien de dimension trois et $f : E \to E$ une isométrie dont la partie linéaire est $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id}$. Est-il vrai que $f$ est un retournement ?

**3.–** Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, $H$ l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, $s_H$ la réflexion hyperplane d'hyperplan $H$ et $g = s_H \circ f$. Est-il vrai que $Fix\ g$ contient $F$ et $A$ ?

**4.–** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier inscrit dans le cube $[-1, 1]^3$. Précisément $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, -1)$, $C = (-1, -1, 1)$ et $D = (-1, 1, -1)$. Est-il vrai que la droite $(AA')$ où $A' = (-1, -1, -1)$ coupe le plan $(BCD)$ perpendiculairement ?

**5.–** On note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y)$ les coordonnées d'un point dans cette base. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$. Est-il vrai qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ dans laquelle la conique $\mathcal{C}$ s'écrit

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \quad ?$$

**Le problème.** – [$\geq$ 10 pts] Étant donnés $n$ points $A_1, \cdots, A_n$ d'un espace affine euclidien $E$, une *médiane géométrique* est un point minimisant la fonction $\Phi : E \to \mathbb{R}_+$ de la somme des distances aux points

$$M \longmapsto \Phi(M) = A_1M + \cdots + A_nM$$

On montre qu'un tel point existe toujours et qu'il est unique dès que les points $A_1, \cdots, A_n$ ne sont pas tous alignés. Le but de ce problème est l'étude de la médiane géométrique d'un ensemble de points du plan.

Première partie : Étude d'un cas particulier.– Dans cette partie, on se place dans un plan euclidien orienté $E = \mathcal{P}$. On suppose $n = 3$ et on note les points $A$, $B$ et $C$ plutôt que $A_1$, $A_2$ et $A_3$. On s'intéresse au cas particulier où $A$, $B$ et $C$ forment un triangle équilatéral.

1) On identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$ et on note $a$, $b$ et $c$ les affixes de $A$, $B$ et $C$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $a \neq 0$ et que

$$b = ja \quad \text{et} \quad c = j^2 a$$

où $j = e^{2i\pi/3}$. On rappelle que $1 + j + j^2 = 0$ et $|j| = |j^2| = 1$.

a) Montrer que $ABC$ est un triangle équilatéral

b) Faire un dessin soigné du triangle $ABC$.

2) a) Montrer que le point $O$ d'affixe nulle vérifie

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés.

b) On note

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}, \quad \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}.$$

Montrer que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

3) Soit $M$ un point quelconque de $\mathcal{P}$.

a) En partant du fait que

$$OA = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u} \rangle, \quad OB = \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{v} \rangle \quad \text{et} \quad OC = \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w} \rangle,$$

montrer que

$$OA+OB+OC=\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\rangle+\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u}\rangle+\langle\overrightarrow{MB},\overrightarrow{v}\rangle+\langle\overrightarrow{MC},\overrightarrow{w}\rangle.$$

b) En déduire que

$$OA+OB+OC=\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u}\rangle+\langle\overrightarrow{MB},\overrightarrow{v}\rangle+\langle\overrightarrow{MC},\overrightarrow{w}\rangle.$$

c) Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$OA+OB+OC\leq MA+MB+MC.$$

d) Montrer que $O$ est une médiane géométrique des points $A$, $B$ et $C$.

Deuxième partie : Point de Fermat.– On se donne $ABC$ un triangle quelconque, mais non plat, du plan $\mathcal{P}$ euclidien orienté. On dit qu'un point $F\in\mathcal{P}$ est un *point de Fermat*[1] si l'on a

$$(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB})=(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC})=(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA})=\frac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés. À titre d'exemple, le point $O$ de la partie précédente est un point de Fermat (voir question 2a). Comme plus haut, on identifie le plan $\mathcal{P}$ avec celui des nombres complexes.

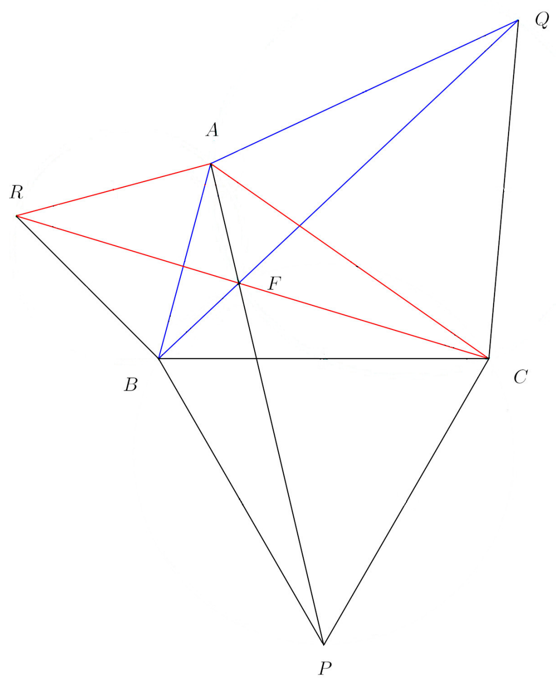
4) On suppose que $F$ est un point de Fermat du triangle $ABC$ et on note

$$\overrightarrow{u}=\frac{\overrightarrow{FA}}{\|\overrightarrow{FA}\|},\quad\overrightarrow{v}=\frac{\overrightarrow{FB}}{\|\overrightarrow{FB}\|}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{w}=\frac{\overrightarrow{FC}}{\|\overrightarrow{FC}\|}.$$

a) On considère la rotation linéaire $\overrightarrow{r}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Donner une écriture de $\overrightarrow{r}$ sous forme complexe.
b) Montrer que $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}$.
c) En déduire que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.
d) Déduire de la première partie que $F$ est une médiane géométrique des points $A$, $B$ et $C$.

1. Plusieurs appellation cohabitent : on trouve aussi *point de Torricelli* et *point de Steiner*.

On suppose pour tout le reste de cette partie que le triangle (non plat) $ABC$ ne possède aucun angle dont la mesure excède $2\pi/3$. On note $R$, $P$ et $Q$ trois nouveaux points, extérieurs au triangle $ABC$ et tels que les trois triangles $ARB$, $BPC$ et $CQA$ soient équilatéraux (figure dans l'énoncé).




Trois triangles équilatéraux s'appuyant sur les côtés du triangle $ABC$. Le point de Fermat $F$ est à l'intersection des droites $(AP)$, $(CR)$ et $(BQ)$.

5) On considère la rotation affine $r_A$ de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que $r_A$ envoie le triangle $ARC$ sur le triangle $ABQ$.

b) Soit $F$ le point d'intersection des droites $(RC)$ et $(BQ)$. Montrer que

$$(\overrightarrow{RF}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \quad [\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés.

c) Énoncer le résultat de cocyclicité du cours qui fait intervenir une égalité d'angle orientée modulo $\pi$.

d) Montrer que les points $ARBF$ sont cocycliques.

6) a) Déduire de 5) que

$$(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = (\overrightarrow{RB}, \overrightarrow{RA}) \quad [\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés.

b) Montrer, au sens de la mesure des angles orientés, que

$$(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi}{3} \quad [\pi]$$

puis que

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = \frac{2\pi}{3} \quad [\pi].$$

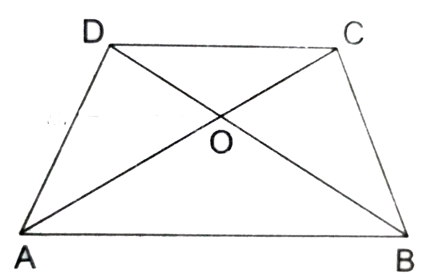
c) Montrer que $F$ est un point de Fermat du triangle $A$, $B$ et $C$.

Troisième partie : Résultats généraux.– On se place dans le cas général où $n \geq 3$ et où l'espace affine euclidien $E$ est de dimension plus grande ou égale à deux.

7) On suppose que l'on a trouvé un point $O$, distinct des points $A_1, ..., A_n$, tel que

$$(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}) = \cdots = (\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]$$

Montrer que $O$ est une médiane géométrique. *Indication :* s'inspirer des questions 2 et 3.




Un quadrilatère convexe et le point d'intersection de ses diagonales.

8) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque et $O$ l'intersection des deux diagonales et $M$ un point quelconque.

a) Montrer que $AO + OC \leq AM + MC$ et $BO + OD \leq BM + MD$.

b) En déduire que $O$ est une médiane géométrique.

c) À votre avis, la réciproque au résultat énoncé dans la question 7 est-elle valide ? Justifier.

9) On suppose que $O$ est une médiane géométrique des points $A_1, \cdots, A_n$ et que $f : E \to E$ est une transformation. Dire si les affirmations ci-dessous sont exactes. Justifier votre réponse en donnant une démonstration ou un contre-exemple.

a) Si $f$ est une isométrie alors $f(O)$ est une médiane géométrique des points $f(A_1), \cdots, f(A_n)$.

b) Si $f$ est une similitude (de rapport $k \neq 0$) alors $f(O)$ est une médiane géométrique des points $f(A_1), \cdots, f(A_n)$.

c) Si $f$ est une application affine alors $f(O)$ est une médiane géométrique des points $f(A_1), \cdots, f(A_n)$.