Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du 26 septembre 2016 - durée 2h

Les documents, les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.

2.– Soient $O \in E$ et $f_1 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1$, $f_2 = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2$ où g_1 et g_2 sont des éléments de $GA(E)$ qui fixent O. Montrer que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

3.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k'}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k' > 0$). on suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie de rapport kk' et de centre $K = I + \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle sont des homothéties affines de même rapport.

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

5.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension 2 ou trois.

1) Soient $p \geq 1$, $A_1, ..., A_p$ des points de E, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels tels que $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et ϕ définie par

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

i) Montrer que ϕ est une bijection.
ii) Le point G tel que $\phi(G) = \overrightarrow{0}$ est appelé le *barycentre*[1] de la famille de points pondérées $((A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p))$ et on note $G = bar((A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p))$. Montrer que si O est une origine quelconque de E alors

$$G = O + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

iii) Soient A, B deux points quelconques de E. On rappelle que le segment $[A, B]$ est l'ensemble des points

$$[A, B] = \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } M = A + \lambda \overrightarrow{AB}\}$$

Montrer que $[A, B] = \{G \in E \mid G = bar((A, (1 - \lambda)), (B, \lambda)), \lambda \in [0, 1]\}$.

2) i) Pour toute la suite on note $f : E \longrightarrow E$ une application affine quelconque. Montrer que f conserve le barycentre c'est-à-dire :

$$G = bar((A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p)) \implies f(G) = bar((f(A_1), \lambda_1), ..., (f(A_p), \lambda_p)).$$

pour tout système de points pondérés $(A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p)$.
ii) Soient A, B deux points quelconques de E. Montrer que l'image par f du segment $[A, B]$ est le segment $[f(A), f(B)]$.

3) On dit qu'une partie $P \in E$ est *convexe* si

$$\forall\, (M_1, M_2) \in P \times P, \quad [M_1, M_2] \subset P.$$

1. Il est appelé *isobarycentre* si $\lambda_1 = ... = \lambda_p$.

i) Soient A, B dans E. Montrer que $[A, B]$ est convexe.
ii) Soient A, B, C trois points affinement indépendants et soit $P_{(AB),C}$ le demi-plan affine fermé défini par

$$P_{A,B,C} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}.$$

Montrer que $P_{A,B,C}$ est convexe.
iii) Montrer que si P_1 et P_2 sont convexes alors $P_1 \cap P_2$ est convexe.
iv) Montrer que si P est une partie convexe alors $f(P)$ est partie convexe de E.

On dit qu'un point C d'une partie convexe P est extrémal si pour tout couple de points distincts $M_1 \in P$, $M_2 \in P$, $M_1 \neq M_2$, on a

$$C = M_1 + \lambda\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1.$$

On note $\mathcal{E}(P)$ l'ensemble des points extrémaux de P.

4) Soient A, B deux points distincts de E. On veut montrer que les points extrémaux de $P = [A, B]$ sont A et B.
i) Soit $M \in]A, B[$. Montrer que M n'est pas extrémal.
ii) Montrer que si $M \in [A, B]$ n'est pas extrémal alors $M \in]A, B[$
iii) En déduire que $\mathcal{E}([A, B]) = \{A, B\}$

5) On suppose désormais que $f : E \longrightarrow E$ est bijective et que $P \subset E$ est une partie convexe. On note $X(P) = P \setminus \mathcal{E}(P)$ l'ensemble des points non extrémaux de P.
i) Montrer que $f(X(P)) \subset X(f(P))$.
ii) En utilisant l'application réciproque f^{-1} montrer que $X(f(P)) \subset f(X(P))$ et en déduire que $f(\mathcal{E}(P)) = \mathcal{E}(f(P))$.
iii) On suppose que le cardinal de $\mathcal{E}(P)$ est fini. Montrer que si $f(P) = P$ alors l'isobarycentre des points de $\mathcal{E}(P)$ est un point fixe de f.

6) Soient A, B et C trois points affinement indépendants de E. On note

$$ABC = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, 0 \leq \lambda, 0 \leq \mu, \lambda + \mu \leq 1\}$$

le triangle plein de sommets A, B, et C.
i) Soit $P_{B,C,A}$ le demi-plan affine fermé défini de façon analogue au 3.*ii* par la formule

$$P_{B,C,A} = \{B + \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BA}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}.$$

Montrer que

$$P_{B,C,A} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda + \mu \leq 1\}.$$

ii) Montrer de même que

$$P_{C,A,B} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, 0 \leq \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

iii) Montrer que ABC est l'intersection des trois demi-plans $P_{A,B,C}$, $P_{B,C,A}$ et $P_{C,A,B}$. En déduire que ABC est convexe.

7) On suppose désormais que dim $E = 2$. Étant donné $P \subset E$ on note $GA(E,P)$ l'ensemble des transformations affines $f : E \longrightarrow E$ qui laissent P invariant :

$$GA(E,P) = \{f \in GA(E) \mid f(P) = P\}$$

On s'intéresse au cas où P est un triangle plein ABC, les points A, B et C étant linéairement indépendants. On admettra que $\mathcal{E}(ABC) = \{A,B,C\}$
i) On note $\mathfrak{S}_3$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{A,B,C\}$. On pose

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & GA(E,ABC) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_3 \\ & f & \longmapsto & f_{|\{A,B,C\}} \end{array}$$

où $f_{|\{A,B,C\}}$ est la restriction de f à $\{A,B,C\}$. Montrer que Φ est bien définie.
ii) Montrer que f est injective (on pourra utiliser le fait que (A,B,C) est une base affine).
iii) Soit $f : E \longrightarrow E$ une transformation affine quelconque. On suppose que f permute les points A, B et C i. e. $f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\}$. Montrer que $f(ABC) = ABC$ (on pourra utiliser la conservation des barycentres).
iv) Montrer que Φ est une bijection. Quel est le cardinal de $GA(E,ABC)$?