Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du 27 septembre 2018 - Durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Montrer que $f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$.

3.– Soient $O \in E$ et $f_1 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1$, $f_2 = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2$ où g_1 et g_2 sont des éléments de $GA(E)$ qui fixent O. Montrer que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. On suppose que $\overrightarrow{f} = kId$ avec $k \neq 1$ et $k \neq 0$. Montrer que f admet un unique point fixe I et en déduire que f est une homothétie de centre I et de rapport k.

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k'}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k' > 0$). On suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie dont on déterminera le centre K en fonction de I, J, k et k'. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est kId avec $k \neq 1$ sont des homothéties de rapport k.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension deux ou trois et $\overrightarrow{E}$ sa direction.

1) Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts de E. On note I, J, K, L les milieux respectifs de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$.

i) Montrez que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

ii) Exprimer $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$ en fonction de A, B, C et D.

iii) En déduire la nature du polygone $IJKL$.

iv) Que se passerait-il si l'on avait $A = C$? Même question avec $A = B$?

2) Soit I un point de E. On rappelle que la symétrie centrale de centre I est l'application $s_I : E \to E$ telle que pour tout point $M \in E$, on a

$$\overrightarrow{Is_I(M)} = -\overrightarrow{IM}.$$

i) Montrer que s_I est une application affine et expliciter son application linéaire associée.

ii) Montrer que s_I est bijective et déterminer son inverse.

3) i) Soit s_I et s_J deux symétries centrales. Montrer que $s_I \circ s_J$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

ii) Soit $IJKL$ un parallélogramme. Montrer que $s_I \circ s_J \circ s_K \circ s_L = id$

4) On suppose toujours que $IJKL$ est un parallélogramme. Existe-t-il un quadrilatère $ABCD$ tel que I, J, K, L soient les milieux respectifs de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$? Si oui, est-il unique ?
Indication.– Utiliser la question 3.ii.

5) Soit n un entier et $B_1, ..., B_n$ des points de E. On dit que $B_1...B_n$ est un *polygone des milieux* s'il existe n points $A_1, ..., A_n$ de E tels que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on ait $B_i = Mil[A_i, A_{i+1}]$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1$). Montrer que si $B_1...B_n$ est un polygone des milieux alors A_1 est point fixe de $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$.

6) On suppose dans cette question que $n = 2k$ est pair et que $k \geq 2$.

i) À quelle condition nécessaire et suffisante sur les B_i la composée $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ admet-elle au moins un point fixe ?

ii) On suppose que la condition du i) est satisfaite. Montrer que $B_1...B_n$ est un polygone des milieux.

iii) Le n-uplet de points $(A_1, ..., A_n)$ trouvé en ii) est-il unique ?

7) On reprend les notations de la question 5) mais on suppose maintenant que $n = 2k + 1$ est impair avec $k \geq 3$.

i) Montrer que la composée $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ a un unique point fixe Ω et exprimer Ω en fonction de $B_1, ..., B_n$.

ii) Montrer que $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ est une symétrie centrale de centre Ω.

iii) Montrer que $B_1...B_n$ est (toujours) un polygone des milieux.

iv) Le n-uplet de points $(A_1, ..., A_n)$ trouvé en iii) est-il unique ?