Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du mercredi 17 novembre 2021 - Durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ une application orthogonale et $(\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$. Montrer que $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1), \cdots, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_n))$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$.

2.– Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel orienté de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$. On considère un élément $\overrightarrow{f} \in SO(\overrightarrow{E})$ et on note A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

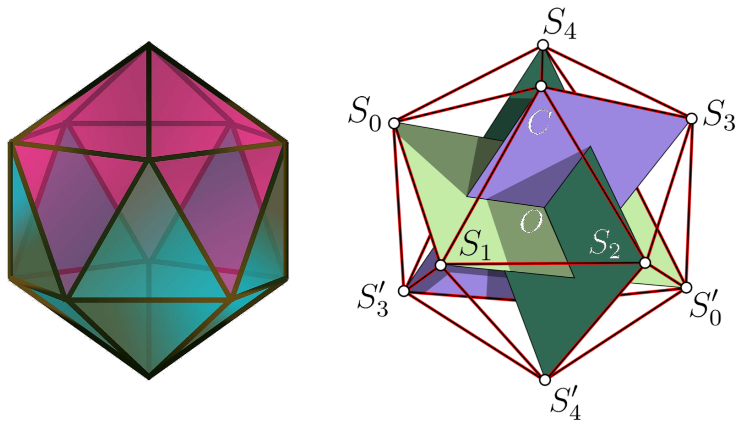
(on admettra le résultat de la Q1).

3– Soit $f : E \to E$ une application affine. On suppose que $\overrightarrow{f} = k\overrightarrow{id}$ avec $k \neq 1$. Montrer que f a un unique point fixe.

4.– Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $s_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $s_\theta(z) = e^{i\theta}\overline{z}$. Déterminez $Fix\, s_\theta$.

5.– Donner l'énoncé exact du lemme d'adjonction d'un point fixe (on ne demande pas la démonstration).

Le problème. – (10 pts) Le but de ce problème est d'étudier les propriétés géométriques de l'icosaèdre



Décomposition de l'icosaèdre $I = I_+ \cup I_-$ (à gauche), notations des sommets (à droite)

Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet

Une question préliminaire.– Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, ..., n-1\}$. On note $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ la k-ème racine n-ème de l'unité.

1) Montrer que

$$\omega_{k+1} + \omega_k = 2\cos\frac{\pi}{n}\, e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$$

Première partie : voisinage d'un sommet.– On note $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ le repère standard de $\mathbb{R}^3$. On considère le point $C = O + \overrightarrow{e_3}$ et pour tout $k \in \{0, 1, ..., 4\}$ les points

$$S_k = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2k\pi}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2k\pi}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Dans la suite, on adopte une convention circulaire pour l'indice k, l'écriture S_5 signifie S_0, S_6 signifie S_1, etc. On donne également les valeurs

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

2) Montrer que le triangle T_0 de sommets S_0, S_1 et C est équilatéral.

3) Soit r l'application de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$r(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos\frac{2\pi}{5} - y\sin\frac{2\pi}{5} \\ x\sin\frac{2\pi}{5} + y\cos\frac{2\pi}{5} \\ z \end{pmatrix}$$

a) Montrer que r est affine.
b) Montrer que r est une isométrie.
c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $r^n = r \circ r^{n-1}$ et on convient que $r^0 = id$. Montrer que

$$r^n(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos\frac{2n\pi}{5} - y\sin\frac{2n\pi}{5} \\ x\sin\frac{2n\pi}{5} + y\cos\frac{2n\pi}{5} \\ z \end{pmatrix}$$

d) En déduire que les triangles T_k, $k \in \{0,...,4\}$, de sommets $S_k S_{k+1} C$ sont tous équilatéraux et isométriques entre eux.

4) a) Soit $\Omega = (0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})$. En s'appuyant sur la question préliminaire montrer que

$$\overrightarrow{\Omega S}_{k+1} + \overrightarrow{\Omega S}_k = -2\cos\frac{\pi}{5}\,\overrightarrow{\Omega S_{k+3}}.$$

b) Montrer ensuite que

$$\overrightarrow{OS}_{k+1} + \overrightarrow{OS}_k = -2\cos\frac{\pi}{5}\,\overrightarrow{CS_{k+3}}.$$

Suggestion.– On pourra penser à introduire un point intermédiaire.

Seconde partie : construction de I_+.– Soit $k \in \{0,...,4\}$. On considère le plan affine Π_k engendré par les trois points O, S_k et S_{k+1} et s_k la réflexion affine selon ce plan. On note $S'_k = s_k(C)$ et $T'_k = s_k(T_k)$. La partie supérieure I_+ de l'icosaèdre est l'ensemble :

$$I_+ = \bigcup_{i=0}^{4} (T_k \cup T'_k).$$

5) a) Montrer que pour tout k, $\|\overrightarrow{OS}_k\| = \|\overrightarrow{OS}_{k+1}\|$.
b) En déduire que $\overrightarrow{OS}_k + \overrightarrow{OS}_{k+1}$ et $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$ sont orthogonaux puis

que $\overrightarrow{CS}_{k+3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$.

c) Montrer que $2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$.

d) Montrer que $2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CS}_{k+3}$.

6) On note $\mathcal{B}_k$ la base orthogonale

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k, 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}).$$

a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $\mathcal{B}_k$.

b) Écrire la matrice de $\overrightarrow{s_k}$ dans la base $\mathcal{B}_k$.

c) Montrer que $s_k(C) = O - \overrightarrow{OS}_{k+3}$.

d) Soit σ l'application affine définie par

$$\sigma(M) = O - \overrightarrow{OM}$$

pour tout point M de l'espace. Reconnaître σ.

e) Montrer que $S'_k = \sigma(S_{k+3})$.

Troisième partie : propriétés géométriques de I.– On note $C' = \sigma(C)$ puis I_- l'image par σ de I_+ et on pose

$$I = I_+ \cup I_-.$$

7) Montrer que l'ensemble des sommets de I est inclus dans une sphère de centre O et de rayon OC.

8) Pour tout $k \in \{0, ..., 4\}$, on considère l'application affine $f_k = \sigma \circ s_k$.

a) Écrire la matrice de $\overrightarrow{f}_k$ dans la base $\mathcal{B}_k$.

b) Montrer que f_k est un retournement dont l'axe est dirigé par $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS_{k+3}}$ et passe par le point O.

c) Montrer que $f_k(C) = S_{k+3}$.

d) Déterminer le point $f_k(S_{k+3})$.

e) En déduire que f_k laisse invariant le plan affine engendré par O, C et S_{k+3}.

f) Montrer que f_k laisse également invariant le plan affine engendré par O, S_k, S_{k+1}.

Formulaire trigonométrique.–

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p+\cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\cos p-\cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p+\sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p-\sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b-\sin b\cos a
\end{aligned}$$