

Université Claude Bernard Lyon 1  
**Licence 3 Calcul Différentiel**  
**Contrôle partiel**  
Lundi 3 novembre 2008 - Durée 3 heures

*Les documents et les calculs sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Question de cours** – (2 pts) Donner la définition de la différentiabilité d'une application en un point.

**Exercice du cours** – (2 pts) Soit  $Y$  un fermé d'un espace vectoriel normé complet  $F$  et  $\Phi : Y \rightarrow Y$  une application  $k$ -contractante avec  $k < 1$ . Soit  $x_0 \in Y$ . On définit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation  $x_n = \Phi(x_{n-1})$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\|x_{n+p} - x_n\|_F \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|_F$$

et en déduire que  $\Phi$  admet un point fixe.

**Exercice 1** – (3 pts) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $\mathcal{C}^1$  vérifiant pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $h \in \mathbb{R}^n$  l'inégalité

$$\langle df_x(h), h \rangle \geq \|h\|^2.$$

1. Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geq \|b - a\|^2.$$

On pourra pour cela utiliser l'application  $\varphi : t \mapsto \langle f(a + t(b - a)), b - a \rangle$ .

2. Montrer que  $f$  est injective.
3. Montrer que  $f$  est un difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^n$  dans  $f(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 2** – (3 pts) On considère la fonction suivante  $f$  définie pour  $y \neq 0$  par :

$$f(x, y) = \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right).$$

1. Donner la différentielle de  $f$  au point  $(1, 1)$  appliquée au vecteur  $(h, k)$ .

2. Pour  $x \in [0, 1]$  et  $y \geq 1$ , montrer que pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|d^2 f_{(x,y)}((h, k), (h, k))| \leq ah^2 + b|hk| + ck^2,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes simples dépendant de  $\pi$  et  $\pi^2$ .

3. En déduire que pour  $-1 \leq h \leq 0$ , et  $k \geq 0$ , on peut estimer  $f(1 + h, 1 + k)$  par  $M(h - k)$  avec une erreur (grossièrement) inférieure à  $5(|h| + 2k)^2$ , où  $M$  est une constante simple qu'on déterminera. On pourra utiliser pour cela la formule de Taylor-Lagrange.

**Problème – Éclatement d'un point double.** (10 pts) On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ . On suppose que  $f$  vérifie  $f(0, 0) = 0$  et  $df_{(0,0)} = 0$ . On définit la fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la façon suivante :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad F(x, t) := \frac{1}{x^2} f(x, tx).$$

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un pour la fonction  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$ . Évaluer le résultat obtenu en  $(x, tx)$ .

*On admettra sans démonstration que l'application des théorèmes usuels sur les intégrales à paramètre à l'expression précédente permet de prolonger  $F$  en une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .*

2. Montrer l'égalité suivante :

$$F(0, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right).$$

Dans la suite du problème, on suppose que la matrice hessienne de  $f$  en  $(0, 0)$  a un déterminant strictement négatif, et que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0$ .

3. Montrer que l'équation  $F(0, t) = 0$  a deux solutions réelles distinctes, et qu'on peut écrire :

$$F(0, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)(t - t_1)(t - t_2). \quad (1)$$

4. Calculer  $\frac{\partial F}{\partial t}(0, t_i)$  pour  $i = 1, 2$ , et montrer qu'il existe  $U_1$  un voisinage de 0, et  $V_1$  un voisinage de  $t_1$ , et une fonction  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  telle que :

$$\forall (x, t) \in U_1 \times V_1, \quad (F(x, t) = 0 \iff t = \varphi_1(x)).$$

Montrer de même qu'il existe  $U_2$ ,  $V_2$  et  $\varphi_2$ , respectivement un voisinage de 0, de  $t_2$  et une fonction  $U_2 \rightarrow V_2$  tels que :

$$\forall (x, t) \in U_2 \times V_2, \quad (F(x, t) = 0 \iff t = \varphi_2(x)).$$

5. Montrer que, dans la question précédente, on peut choisir  $U_i$  et  $V_i$  de la forme  $]x - \alpha, x + \alpha[$  et  $]t_i - \beta, t_i + \beta[$ , respectivement, où  $\alpha$  et  $\beta$  ne dépendent pas de  $i$ .

Le but est maintenant de montrer l'équivalence suivante :

$$(f(x, y) = 0) \iff (y = x\varphi_1(x) \text{ ou } y = x\varphi_2(x)).$$

6. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

En utilisant la formule (1), montrer que cela peut s'écrire :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \left( (y - t_1 x)(y - t_2 x) + r(x, y) \right)$$

où  $r(x, y) = o(x^2 + y^2)$ .

On introduit les quantités suivantes :

$$T = \max_{i \in \{1, 2\}} |t_i| + \beta, \quad \varepsilon = \frac{\beta^2}{1 + 2\beta^2 + 2T^2}.$$

7. Montrer que, quitte à diminuer  $\alpha$ , a :

$$\left( |x| < \alpha \text{ et } |y| < T\alpha \right) \Rightarrow \left( |r(x, y)| \leq (x^2 + y^2)\varepsilon \right).$$

8. En utilisant la question précédente, et en distinguant les cas  $x = 0$  et  $x \neq 0$  (auquel cas on notera  $t = y/x$ ), montrer que pour  $|x| < \alpha$  et  $|y| < T\alpha$ , on a l'équivalence suivante :

$$\left( f(x, y) = 0 \right) \iff \left( y = x\varphi_1(x) \text{ ou } y = x\varphi_2(x) \right).$$

9. Exprimer l'équation de la tangente en 0 à la courbe d'équation  $y = x\varphi_i(x)$ . En déduire que l'équation des tangentes au point double à l'origine de la courbe  $f(x, y) = 0$  est :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0.$$

**Remarque :** La donnée d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  permet de définir l'ensemble des zéros de  $f$ . Si  $df$  ne s'annule pas, cet ensemble est une courbe de  $\mathbb{R}^2$ , par théorème des fonctions implicites. Ici, les hypothèses choisies assuraient qu'on avait un point double en zéro. La méthode développée permet alors de calculer les tangentes des arcs qui se coupent en  $(0, 0)$ .