L2. Application du calcul différentiel aux courbes et surfaces

Mardi 5 Juin 2007. Durée : 2h00

Les notes de cours sont autorisées.

Problème 1. On étudie la famille de courbes planes Γ_c de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par l'équation

$$\ln(x^2 - xy + y^2) = c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que quel que soit $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble Γ_c n'est pas vide.

2) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles Γ_c est régulière.

3) Déterminer la droite tangente de Γ_0 au point $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

4) Déterminer la courbure de Γ_0 au point $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Problème 2. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq (1-x)^2\}.$$

1) Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.

2) Calculer l'intégrale double

$$J = \int\int_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

3) Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\partial^+ D} (2y - y^3)dx + (2x + x^3)dy$$

4) Comparer I et J. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Problème 3. Soit $s \mapsto (f(s), g(s))$, $s \in [0, L]$, une courbe régulière du plan $(0xy)$ paramétrée par l'abscisse curviligne et telle que $f(s) > 0$ pour tout s. On considère la surface S paramétrée par

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,L] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (s,u) & \longmapsto & (f(s)\cos u, f(s)\sin u, g(s) + au) \end{array}$$

où $a > 0$.

1) Montrer que F est un paramétrage régulier.

2) Donner une base du plan tangent ainsi que l'expression d'une normale unitaire.

3) On note R_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) et t_b la translation $(x,y,z) \mapsto (x,y,z+b)$. Montrer que $R_\theta \circ t_{a\theta}(F(s,u)) = F(s,u+\theta)$ et en déduire que S est invariante par le vissage $R_\theta \circ t_{a\theta}$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que l'angle entre la normale et l'axe (Oz) soit constant sur S. (*Suggestion.*– Considérer le produit scalaire entre la normale unitaire et le vecteur $e_3 = (0,0,1)$).

5) On suppose que $f(s) = Ke^{\alpha s}$ où $K > 0$ et $\alpha \neq 0$. Calculer l'aire de l'image $S_1 := F([0,L] \times [0,2\pi])$.

Problème 4. Soit $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne. Le but de cet exercice est de déterminer la *sphère osculatrice* de γ qui est la sphère ayant le meilleur contact possible avec γ en un point donné. Soit $m \in \mathbb{R}^3$, On note $S_{m,r}$ la sphère de centre m et de rayon r (son équation cartésienne est donc $\|x-m\|^2 = r^2$). On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,L] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & s & \longmapsto & \|\gamma(s)-m\|^2 - r^2. \end{array}$$

1) Que signifient géométriquement les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$?

2) On dit que γ a un contact d'ordre au moins trois avec $S_{m,r}$ en $\gamma(0)$ si $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 0$. Déduire de ces conditions les coordonnées du vecteur $\gamma(0) - m$ dans la base de Frenet (t,n,b) en $\gamma(0)$.

3) En déduire m, puis r, en fonction des données de γ en 0 (courbure, torsion, trièdre de Frenet...).

4) On suppose que l'image de γ est contenue dans une sphère de rayon r. Déduire des questions précédentes une relation entre la courbure et la torsion de γ aux points où la torsion ne s'annule pas.